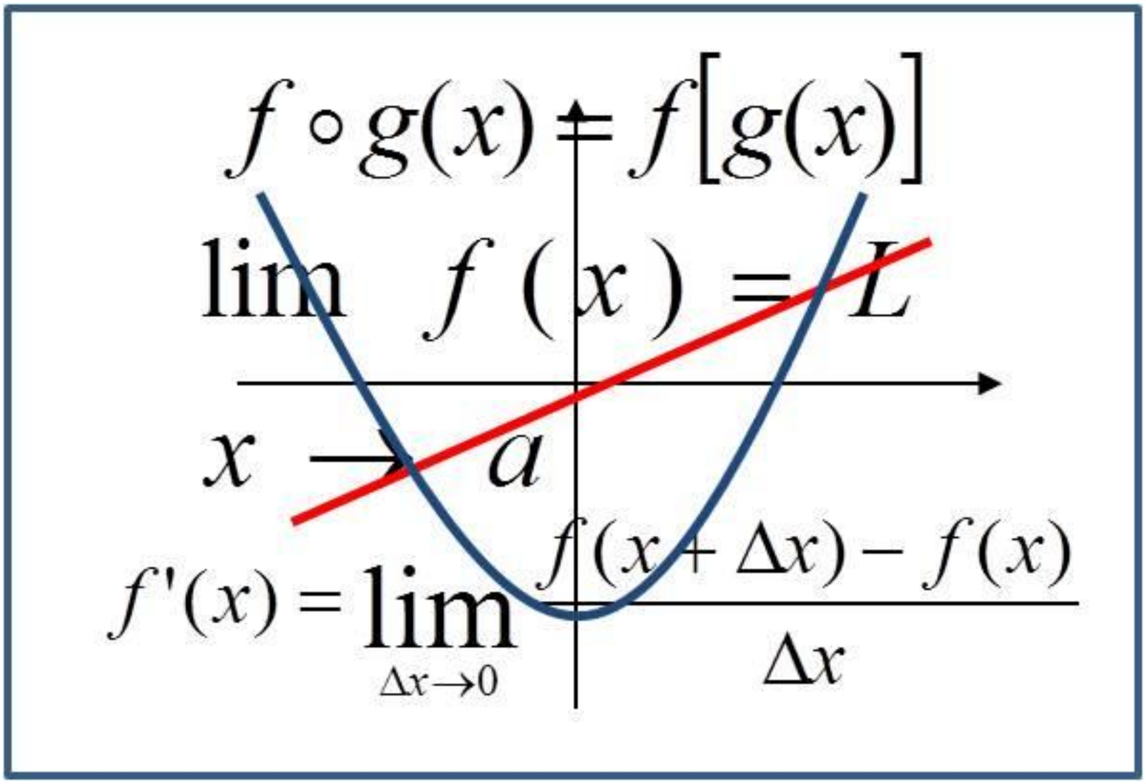
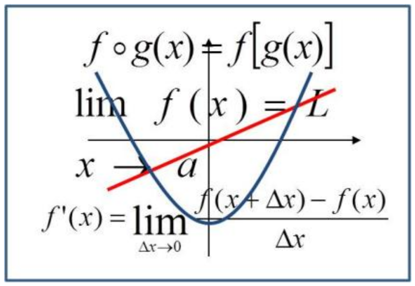
Matemática I



Luis Castellanos

01/01/2005



Matemática I

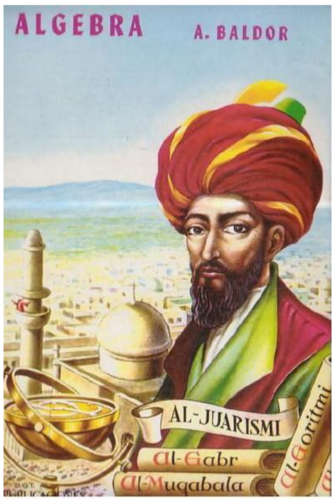
Dr Luis Castellanos,
Maracaibo 2005

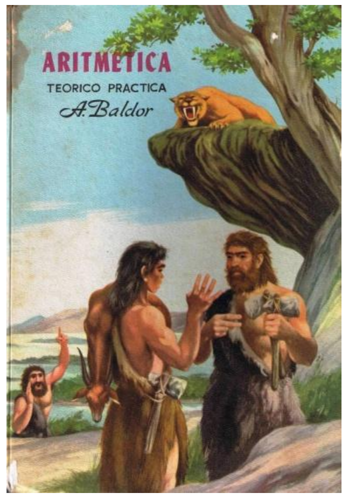
Versión 1.54 revisada en agosto 2013.

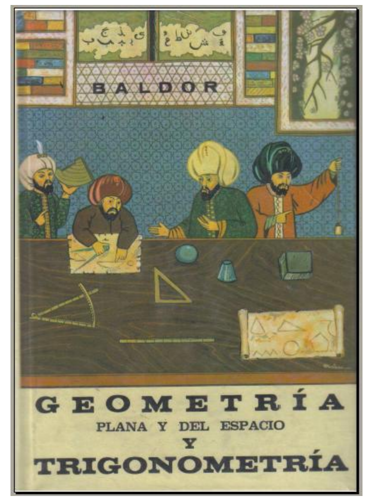
Índice

1 Repaso de Matemática

Siempre se hace del conocimiento de los que empiezan a estudiar Matemática I, que deben tener una buena base de Matemática de Bachillerato, la cual incluye Álgebra, Aritmética y Trigonometría. El señor Aurelio Baldor[1] escribió unos libros muy didácticos y completos acerca de esos temas, y recomiendo que sean consultados para refrescar conocimientos adquiridos previamente.







La Matemática no es difícil, sólo es que muchas personas quedan predispuestas hacia el estudio de números, fracciones y raíces.

Este capítulo normalmente no se contempla en los contenidos programáticos de Matemática I o Cálculo I, pero se presenta para refrescar un poco esos conocimientos que debieron haber sido adquiridos durante el bachillerato.

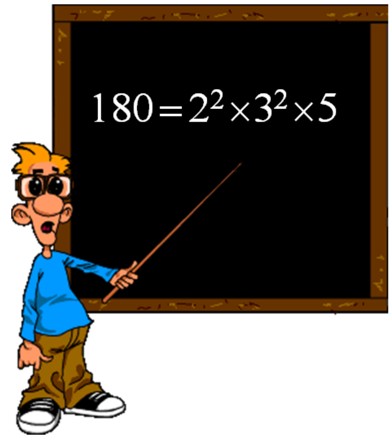
1.1 Factores Primos

El Teorema Fundamental de la Aritmética[2] afirma que todo entero positivo se puede representar de forma única como producto de factores primos.

[1] Docente matemático y Abogado cubano (1906-1978).
[2] Es la rama de la matemática cuyo objeto de estudio son los números y las operaciones elementales hechas con ellos: suma, resta, multiplicación y división.

Número Primo

Un Número Primo puede dividirse exactamente solo por sí mismo y por 1. (En otras palabras sus factores solamente son el 1 y sí mismo)



Ejemplo: 13 puede ser dividido exactamente sólo por 1 o 13, entonces es un número primo.

Si no es un número primo se llama un número compuesto.

Ejemplo: 14 puede ser dividido exactamente por 1,2,7 y 14 así que es un número compuesto.

Factores

Los "factores" son los números que multiplicas juntos para obtener otro número.

Ejemplo: si 2 x 3 = 6, 2 y 3 son los factores de 6.

Factor Primo

Es un factor que es un número primo. Uno de los números primos que, cuando se lo multiplica, resulta en el número original.

Ejemplo: Los factores primos de 15 son 3 y 5 (3 x 5 =15, y 3 y 5 son números primos).

Factorización en primos

Es averiguar qué números primos tienes que multiplicar juntos para obtener el número original.

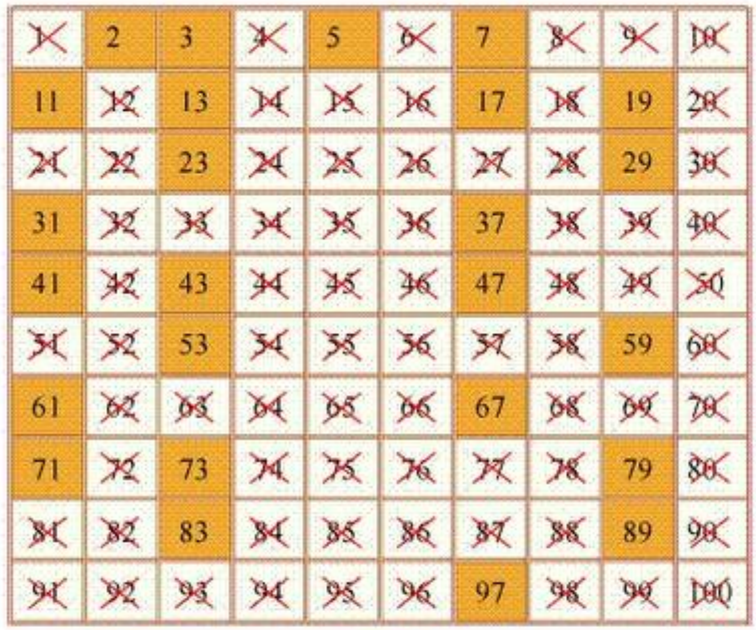
Ejemplo: ¿Cuáles son los factores primos de 12?

Se empieza por el número primo más pequeño, que es 2. Comprobamos: 12 ÷ 2 = 6.

Pero 6 no es primo así que tenemos que factorizarlo también: 6 ÷ 2 = 3

Y 3 es primo, así que: 12 = 2 × 2 × 3

Cada factor es un número primo, así que la respuesta correcta es: la factorización en primos de 12 es 2 × 2 × 3, o también podemos escribir $2^2 \times 3$.



Números Primos en Naranja del 1 al 100

1.2 Múltiplo común

Múltiplo

Los múltiplos de un número son los que resultan cuando se multiplica por otros números (si se multiplica por 1,2,3,4,5, etc.) como en las tablas de multiplicar.

Ejemplo: Los múltiplos de 3 son 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, etc...

Múltiplo Común

Si en dos (o más) números, se mira entre sus múltiplos y se encuentra el mismo valor en las dos listas, esos son los múltiplos comunes a los dos números.

Ejemplo: si se escriben los múltiplos de dos números diferentes (digamos 4 y 5) los múltiplos comunes son los que están en las dos listas:

Los múltiplos de 4 son 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44,...

Los múltiplos de 5 son 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50,...

Entonces, los múltiplos comunes de 4 y 5 son: 20, 40 (y 60, 80, etc. también)

Condiciones de Divisibilidad

Para saber si un número es divisible entre:

2	Debe ser un número par. Ejemplo: 48 es par. 48 ÷ 2 = 24
3	La suma de las cifras que lo componen debe ser múltiplo de 3. Ejemplo: 48 → 4 + 8 = 12. 12 es múltiplo de 3. 48 ÷ 3 = 16.
5	El número termina en 0 ó 5 Ejemplo. 50 y 35 terminan en 0 ó 5. 50 ÷ 5 = 10. 35 ÷ 5 = 7.
6	El número es divisible entre 2 y entre 3. Ejemplo. 48 es divisible entre 2 y entre 3. 48 ÷ 6 = 8.
10	El número termina en 0.
11	Se suman las cifras en los lugares pares, se suman las cifras de los lugares impares, luego se restan estos resultados, y debe ser cero o múltiplo de 11.

Tabla para Factorizar

Normalmente podemos utilizar una tabla para factorizar un número.

90

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$90 = 2 \times 3^2 \times 5$

36

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$36 = 2^2 \times 3^2$

12

12	2
6	2
3	3
1	

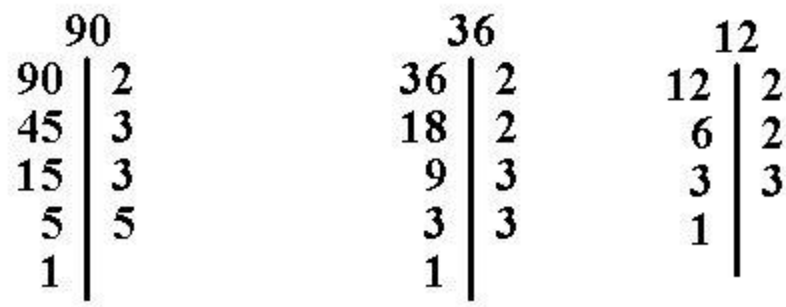
$12 = 2^2 \times 3$

Mínimo Común Múltiplo (mcm)

El mínimo común múltiplo de dos números es el más pequeño de los múltiplos comunes a ambos.

Consiste en descomponer cada número en factores primos y el mínimo común múltiplo será igual al producto de los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

Ejemplo: Halle el mcm de 90, 36 y 12.

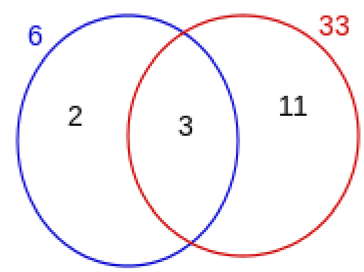


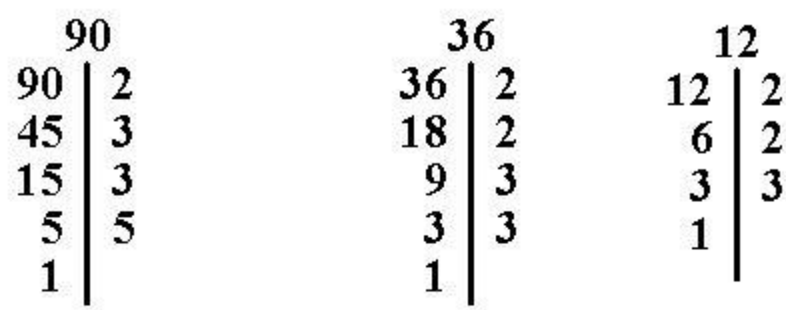
$90 = 2 \times 3^2 \times 5$ $36 = 2^2 \times 3^2$ $12 = 2^2 \times 3$

$mcm = 2^2 \times 3^2 \times 5 \rightarrow mcm = 4 \times 9 \times 5 \rightarrow mcm = 180$

Máximo Común Divisor (mcd)

Para hallar el máximo común divisor (mcd) de varios números, se procede de la misma manera que para el mcm, con la diferencia de que luego de descomponer las cantidades dadas en sus factores primos, se toman de ellos, el producto de los factores comunes con su menor exponente.



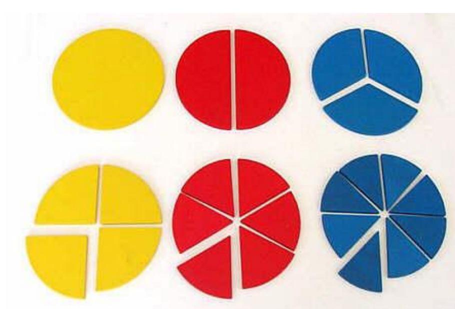


$90 = 2 \times 3^2 \times 5$ $36 = 2^2 \times 3^2$ $12 = 2^2 \times 3$

$mcd = 2 \times 3 \rightarrow mcd = 6$

1.3 Operaciones con Fracciones

Una fracción es una expresión en la forma: a/b donde b ≠ 0. El número superior se llama “numerador” y el número inferior se llama “denominador”.



Una expresión fraccional está simplificada cuando el numerador y el denominador no tienen factores comunes.

Simplificación

Si el numerador y el denominador de una fracción son divisibles por un mismo número, d, distinto de 1 o -1, al dividirlos por d se obtiene otra fracción equivalente a ella. Se dice que la fracción se ha simplificado o se ha reducido:

$$\frac{5}{20}=\frac{1}{4}\;;\;\frac{49}{21}=\frac{7}{3}$$

Suma y resta

Igual denominador: se suman algebraicamente los numeradores y se mantiene el mismo denominador.

Ejemplo:

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{4}-\frac{2}{4}=\frac{3+5-2}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

Denominador diferente: se halla el mcd, se divide entre cada denominador, se multiplica por el numerador, y se efectúa la suma algebraica.

Ejemplo:

$$\frac{3}{5}+\frac{5}{2}-\frac{1}{4}=\frac{(4x3)+(10x5)-(5x1)}{20}=\frac{12+50-5}{20}=\frac{57}{20}$$

Producto

Para multiplicar expresiones fraccionales, se multiplican los numeradores y se multiplican los denominadores.

$$\frac{3}{4}x\frac{2}{5}=\frac{3x2}{4x5}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

Cociente

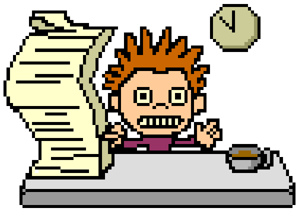
Para dividir se multiplica por el recíproco y luego se factoriza y se simplifica el resultado.

$$\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=\frac{3}{4}x\frac{5}{2}=\frac{15}{8}$$

O se aplica la "doble C" y se multiplican las cifras:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}}=\frac{3x5}{4x2}=\frac{15}{8}$$

1.4 Productos Notables



Es el nombre que reciben multiplicaciones con expresiones algebraicas cuyo resultado se puede escribir mediante simple inspección, sin verificar la multiplicación que cumplen ciertas reglas fijas. Su aplicación simplifica y sistematiza la resolución de muchas multiplicaciones habituales.

Cada producto notable corresponde a una fórmula de factorización. Por ejemplo, la factorización de una diferencia de cuadrados perfectos es un producto de dos binomios conjugados, y recíprocamente.

Cuadrado de una suma

$(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$

Cuadrado de una resta

$(a - b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$

Suma por diferencia

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Cubo de una suma

$(a + b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$

Cubo de una resta

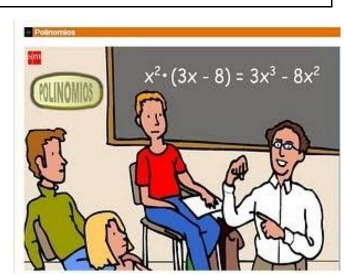
$(a - b)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3$

Trinomio al cuadrado

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$

1.5 Polinomios

El Teorema Fundamental del Algebra[3] afirma que un polinomio de grado n ≥ 1 tiene exactamente n raíces en R.



Término

Es la expresión matemática que consta de un símbolo o de varios símbolos no separados entre si por el signo + o -.

[3] Rama de la matemática que estudia la cantidad considerada del modo más general posible.

Ejemplo:

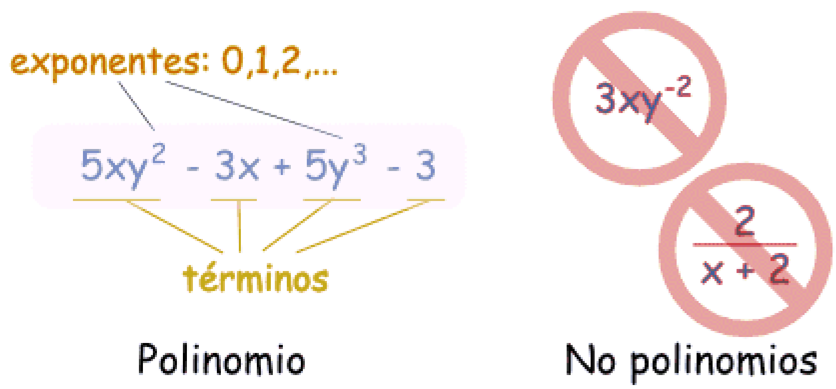
3x, 2xy, a, 4b/3x

Polinomio

Es la expresión algebraica que consta de más de un término.

Se pueden clasificar de acuerdo a:

- Número de Términos:
  - Monomio es un polinomio que consta de un término
  - Binomio consta de dos términos
  - Trinomio consta de tres términos.
- Grado de un Polinomio viene dado por el mayor exponente de la variable en dicho polinomio.
  - Ecuación lineal o de 1er Grado → $y = 3x – 7$
  - Ecuación cuadrática o de 2do Grado → $y = 3x^2 – 4x + 8$
  - Ecuación de 3er Grado → $y = 2x^3 – 4x^2 + x -10$
  - Ecuación de 4to Grado → $y = 5x^4 – 2x^3 + 3x^2 + 7x -15$



Factorización

Es la descomposición de un polinomio en forma de multiplicación.

Hay diversas técnicas para factorizar polinomios:

- Factor común
  - Sacar el factor común es añadir la literal común de un polinomio, binomio o trinomio, con el menor exponente y el divisor común de sus coeficientes, y para sacar esto, hay una regla muy sencilla que dice: Cuadrado del primer término más o menos cuadrado del segundo por el primero más cuadrado del segundo, y no hay que olvidar, que los dos que son positivos iguales

funcionan como el primer término, sabiendo esto, será sumamente sencillo resolver los factores comunes.

  - Ejemplo: $3x^3 + 6x^2 – 9x = 0 \rightarrow 3x(x^2 + 2x – 3) = 0$

- Ruffini
  - Dado el polinomio $P(x)=2x^3 + x^2 - 3x + 5$, el cual se va a dividir entre $Q(x)=x-1$.
  - Se ordena el polinomio P(x) de mayor a menor grado y se colocan los coeficientes de cada término. Si no apareciese algún término entre el de mayor grado y el de menor se coloca un 0. A la izquierda se pone el número que se resta a x en Q(x), en nuestro caso 1 y se baja el coeficiente del término de mayor grado.

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & & & & \\ \hline & 2 & & & \end{array}$$

Fig. 1

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & & 2 & & \\ \hline & 2 & 3 & & \end{array}$$

Fig. 2

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & & 2 & 3 & \\ \hline & 2 & 3 & 0 & \end{array}$$

Fig. 3

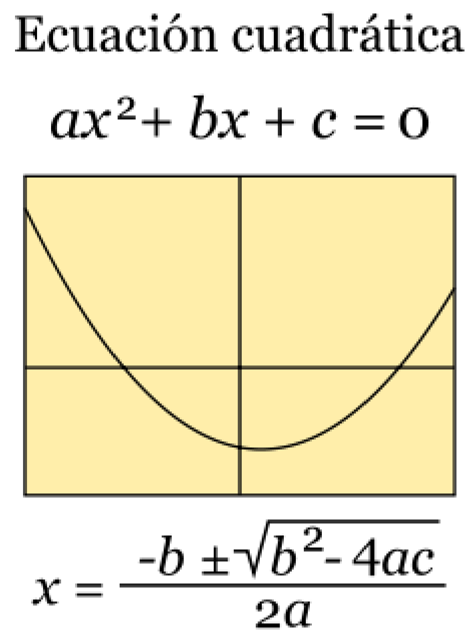
$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & & 2 & 3 & 0 \\ \hline & 2 & 3 & 0 & \boxed{5} \end{array}$$

Fig. 4

  - Se multiplica el coeficiente que se ha bajado (2) por el que se ha colocado a la izquierda (1). El resultado del producto se coloca debajo del coeficiente del término siguiente y se suman.
  - El resultado de la suma se vuelve a multiplicar por el número situado a la izquierda y se repite el proceso.
  - El último número se corresponde con el resto de la división mientras que el resto de números de la fila inferior son los coeficientes del cociente.

- Teorema del Resto
  - Si a es un número real o complejo y p(x) es un polinomio de grado mayor o igual que 1, entonces al efectuar la división $p(x) \div (x – a)$ se obtiene como resto p(a). Es decir, $p(x) = (x – a)\, q(x) + p(a)$. Esto significa que, por ejemplo, sin efectuar la división $(x^4 – 3x^3 + x – 1) \div (x – 2)$, se puede concluir a partir de la validez del Teorema del Resto, que el resto en esa división será -7 pues si $p(x) = x^4 – 3x^3 + x – 1$, entonces: $p(2) = 2^4 – 3.2^3 + 2 – 1$

- Ecuación de segundo grado
    - La expresión canónica de la ecuación de 2do grado o cuadrática (porque el máximo exponente de x es 2) es: $ax^2 + bx + c = 0$, para $a \neq 0$.
    - *x* representa la variable y *a*, *b* y *c* son constantes; *a* es un coeficiente cuadrático ($a \neq 0$), *b* el coeficiente lineal y *c* es el término independiente
    - Arroja dos resultados de x, de acuerdo con el signo del "discriminante" (binomio bajo el signo de radicación).
    - Ejemplo: Halle el valor de x para el polinomio $3x^2 - 7x + 2 = 0$.
        - $x = \dfrac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4.3.2}}{2.3} \Rightarrow x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6} \Rightarrow x = \dfrac{7 \pm \sqrt{25}}{6}$
        - $\Rightarrow x = \dfrac{7 \pm 5}{6} \Rightarrow x = \begin{cases} x_1 = \dfrac{12}{6} \Rightarrow x_1 = 2 \\ x_2 = \dfrac{2}{6} \Rightarrow x_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$



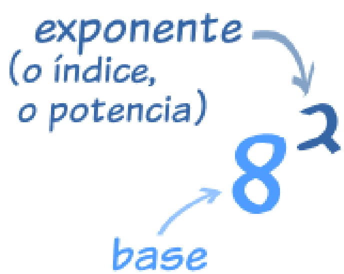
1.6 Propiedad Distributiva

La propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma en álgebra elemental es aquella en la que un número multiplicado por la suma de dos sumandos, es igual a la suma de los productos de cada sumando por ese número. En términos algebraicos:

a · (b + c) = a · b + a · c

a · (b - c) = a · b - a · c

1.7 Exponenciación



La potenciación es una operación matemática entre dos términos denominados: base **a** y exponente **n**. Se escribe a^n y se lee usualmente como «a elevado a n» o «a elevado a la n» y el sufijo en femenino correspondiente al exponente n.

El exponente de un número nos dice cuántas veces se usa el número en una multiplicación.

Lo contrario de multiplicar es dividir, así que un exponente negativo significa dividir.

Un exponente fraccionario como 1/n quiere decir hacer la raíz n-ésima.

$$\begin{aligned} a^1 &= a \\ a^2 &= a \times a \\ &\vdots \\ a^n &= \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ veces}}, \end{aligned}$$

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $(-a)^n = \quad a^n$ **si *n* es par.**
- $(-a)^n = -(a^n)$ **si *n* es impar.**
- $a^{-1} = \frac{1}{a}$
 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
- $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$
 $a^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{a^{\frac{n}{m}}}$

1.8 Logaritmo

Es el exponente al cual hay que elevar la base para obtener dicho número. Por ejemplo, el logaritmo de 1000 en base 10 es 3, porque 1000 es igual a 10 a la potencia 3: $1000 = 10^3 = 10 \times 10 \times 10$.

La operación inversa del logaritmo es la exponenciación.

$$\log_b N = x$$

$$N = b^x$$

Los logaritmos más comunes usados son los Logaritmos Naturales Base 10 (log) y el Logaritmo Neperiano con base e (ln).

1.9 Ejercicios

Halle los factores primos de los siguientes números:

a. 147
b. 36
c. 121
d. 45
e. 256
f. 99
g. 1028
h. 357
i. 47
j. 481

Halle el Mínimo Común Múltiplo y el Máximo Común Divisor de los siguientes números:

a. 12, 24, 36
b. 9, 18, 27
c. 4, 6, 8
d. 7, 14, 49
e. 11, 22, 33
f. 5, 15, 25

Resuelva las siguientes operaciones:

a. $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{7}$
b. $\frac{2}{5}-\frac{3}{4}+\frac{5}{8}$
c. $\frac{3}{4}x\frac{2}{3}x\frac{1}{7}$
d. $\frac{2}{5}x\frac{3}{4}x\frac{5}{8}$
e. $\frac{2}{5}\div\frac{5}{2}$
f. $\frac{3}{4}\div\frac{7}{8}$

Resuelva los siguientes productos:

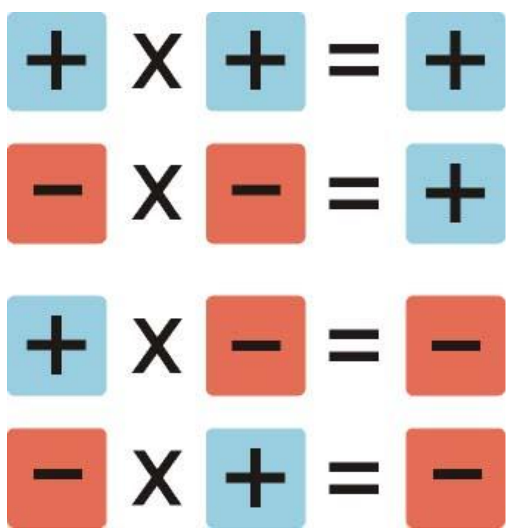
a. $(x + 3)^2$
b. $(½ - 5x)^2$
c. $(5 + 2x)^2$
d. $(3x – 4)^2$
e. $(3 – x)(3 + x)$
f. $(2x + 5)(2x – 5)$
g. $(x + 3)^3$
h. $(3x – 4)^3$
i. $(x^2 + 3x + 5)^2$
j. $(5 + 2x + 7x^2)^2$

Factorice los siguientes polinomios:

a. $4x^2-16$
b. $m^2 + 5m - 14$
c. $a^2 – 13a + 40$
d. $20 + a^2 – 21a$
e. $y^2 – 9y + 20$
f. $8x^3 – 27y^3$
g. $x^2 + 6x - 216$
h. $x^2 – 6x + 8$
i. $x^2 + 8x – 180$
j. $b^2 – 5b + 36$

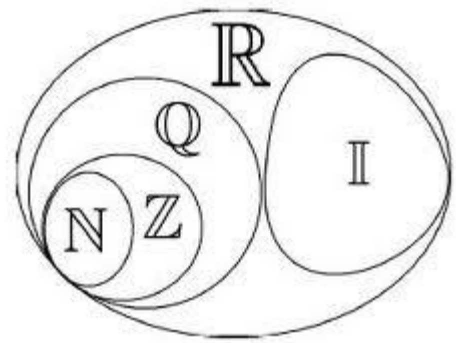
Aplique propiedad distributiva:

a. $3x(2x^2-5)$
b. $6x^3(4x^2+5x-9)$
c. $(2x^3-4x^2-5x-7)2x^2$
d. $(x-1)(x^2+3x-4)$
e. $(2x+3)(4x^2+5x-7)$
f. $(4-5x^2)(3-2x+6x^2)$



2 Números Reales.

2.1 Generalidades.



- Axioma: proposición tan sencilla y evidente que se admite sin demostración.
- Postulado: proposición no tan evidente como un axioma pero que también se admite sin demostración.
- Teorema: proposición que puede ser demostrada (Hipótesis + Tesis).
- Corolario: proposición que se deduce de un teorema como consecuencia del mismo.
- Lema: proposición que sirve de base a la demostración de un teorema.
- Demostración: razonamiento o argumento que se emplea para comprobar un teorema.
- Números Reales: $\mathrm{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, n \}$
- Números Enteros: $\mathrm{Z} = \{ -n, \ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n \}$
- Números Racionales: $Q = \{ a/b \mid a \in Z \wedge (b \in Z \wedge b \neq 0) \}$
- Números Irracionales: I = Decimales inconmensurables y no Periódicos
- Números Reales: $R = Q \cup I$

$$N \subset Z; Z \subset Q \rightarrow N \subset Z \subset Q$$

$$Q \cap I = \phi$$

Repaso:

Sean los conjuntos:

A = { 1, 3, 5, 7 } ; B = { 2, 4, 6, 8 }; C = { 3, 4 }

Halle

$$A \cup B; A \cap B; A \cup C; A \cap C; B \cup C; B \cap C$$

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \qquad A \cap B = \phi$$

$$A \cup C = \{1,3,4,5,7\} \qquad A \cap C = \{3\}$$

$$B \cup C = \{2,3,4,6,8\} \qquad B \cap C = \{4\}$$

- Operaciones en Q:
  - Adición o Suma:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d + b.c}{b.d}$$

  - Multiplicación o Producto:

$$\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$$

  - División:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.c}$$

- Operaciones en R:
  - Adición o Suma:

$$a,b \in R \Rightarrow a - b = a + (-b)$$

  - Multiplicación o Producto:

$$a,b \in R \Rightarrow a \div b = \frac{a}{b} = a.b^{-1}$$

$a \wedge (-a)$ son OPUESTOS

$a \wedge a^{-1}$ son INVERSOS

$$\frac{0}{k} = 0$$

$$\frac{k}{0} = INDETERMINADO$$

$$\frac{0}{0} = INDETERMINADO$$

2.2 Desigualdades.

- Estrictas:
  - a > b ssi[4] b > a
- No Estrictas:
  - a ≥ b ssi b > a v a = b
- Demostrar:
  - Si a < b, entonces a + c < b + c
    - a < b → b – a > 0 → (positivo)
    - Sumamos y restamos c a la expresión:
    - b – a + c – c > 0 →
    - b + c > a + c →
    - **a + c < b + c**
  - Si a < b ∧ c > 0, entonces a . c < b . c
    - a < b → b – a > 0 →
    - c (b – a) > 0 →
    - c . b – c . a > 0 →
    - b . c – a . c > 0 →
    - b . c > a. c →
    - **a . c < b . c**
  - Si a < b ∧ c < 0, entonces a . c > b . c
    - a < b → b – a > 0 ; c < 0 → – c > 0 →

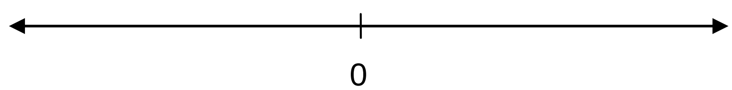
[4] Si y Sólo Si (ssi)

        - $(-c)(b-a) > 0 \rightarrow -b \cdot c + a \cdot c > 0 \rightarrow$
        - **a . c > b . c**

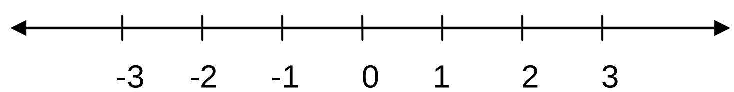
- Ejercicios:
    - Despeje x:
        - $2 + 3x < 5x + 8$
            - $2 - 8 < 5x - 3x$
            - $-6 < 2x$
            - $-6 / 2 < x$
            - $-3 < x \rightarrow x > -3$
        - $\frac{x}{x-3} < 4$
        - $7 + 8x > 11$
        - $5x - 25 > 0$

2.3 Intervalos

- Postulado de Dedekind:
    - Existe una correspondencia biyectiva entre los números Reales (R) y los puntos de la recta numérica.
- Se traza una línea recta, y se escoge un punto en el Eje para que represente el Cero (Origen).

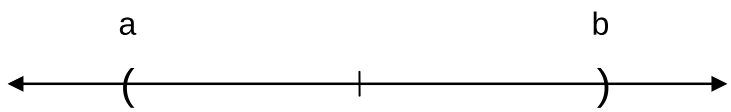


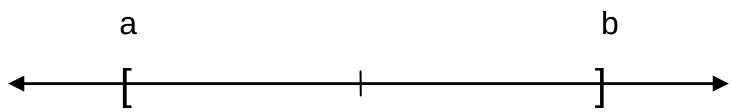
- Se selecciona una unidad de distancia



- Los números positivos se representan con puntos situados a una distancia de x unidades a la derecha del origen.
- Los números negativos se representan con puntos situados a una distancia de x unidades a la izquierda del origen.
- a < b ssi a está a la izquierda de b
- a > b ssi a está a la derecha de b
- Un número x está entre a y b, si:
    - $a < x \wedge x > b \rightarrow a < x < b$

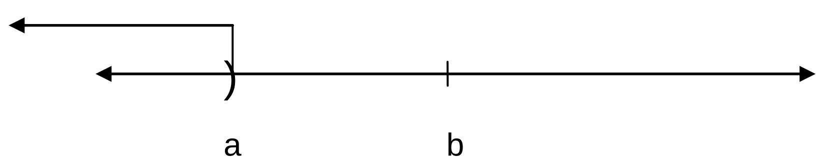
- Existen Intervalos Abiertos y Cerrados:
  - Intervalos Abiertos: $(a, b) = \{ x \mid a < x < b \}$
  - Intervalos Cerrados: $[a, b] = \{ x \mid a \leq x \leq b \}$
- Los Intervalos se emplean para representar conjuntos de soluciones de desigualdades en una variable.
- El conjunto de soluciones de tal desigualdad, es el conjunto de todos los números que satisfacen la misma.





(Donde a y b son los puntos extremos del Intervalo)

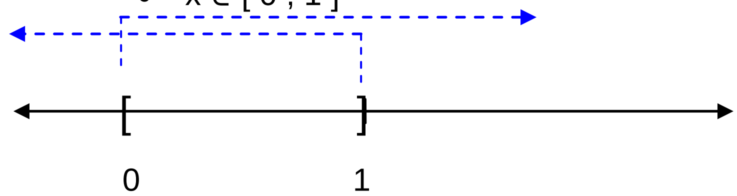
- Ejercicios:
  - Sean a, b Є R. Determine el Intervalo de x:
    - $a < b \wedge x < a \wedge x < b$
      - $x < a < b$
      - $x \in (-\infty , a)$



    - $a < b \wedge x > a \wedge x > b$
    - $a < b \wedge x > a \wedge x < b$
    - $a > b \wedge x < a \wedge x < b$

  - Dados los siguientes Intervalos, determine el Intervalo de x:
    - $(3x + 1/3) \in [1/3 , 10/3]$
      - $1/3 \leq 3x + 1/3 \leq 10/3 \rightarrow$
      - $0 \leq 3x \leq 3 \rightarrow$
      - $0 \leq x \leq 1 \rightarrow$

- $x \in [\,0\,,1\,]$



- $(\,2x + ½\,) \in [\,-4\,,1\,)$
- $\sqrt{x} \in [\,0\,,3\,]$
- $(\,2x - 1\,) \in [\,-5\,,1\,)$
- $(\,x^2 - 5x + 6\,) \in [\,-1/4\,,0\,]$
- $(\,x^2 - 5x + 6\,) \in [\,6\,,20\,]$
- $(\,x^2 + x + 1\,) \in [\,3/4\,,\infty\,]$

2.4 Valor Absoluto

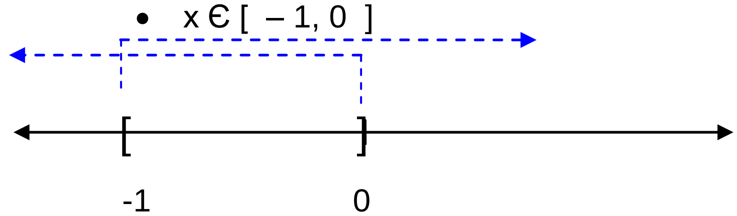
- $|\,x\,| = x$ si $x \geq 0$
- $-x$ si $x < 0$
  - $|\,3\,| = 3$
  - $|\,-5\,| = -(\,-5\,) \rightarrow |\,-5\,| = 5$
- Propiedades:
  - $|\,x\,| < a$ ssi $-a < x < a \wedge a > 0$
  - $|\,x\,| \leq a$ ssi $-a \leq x \leq a \wedge a > 0$
  - $|\,x\,| > a$ ssi $(\,x > a \vee x < -a\,) \wedge a > 0$
  - $|\,x\,| \geq a$ ssi $(\,x \geq a \vee x \leq -a\,) \wedge a > 0$
- Ejercicios:
  - Obtenga el valor de x en cada una de las siguientes ecuaciones:
    - $|\,3x + 2\,| = 5$

$3x + 2 = 5$	$-(\,3x + 2\,) = 5$
$3x = 5 - 2$	$-3x - 2 = 5$
$3x = 3$	$-3x = 5 + 2$
$x = 3/3$	$-3x = 7$
$x = 1$	$x = -7/3$

$X_1 = 1$

$X_2 = -7/3$

        - | 2 x – 1 | = | 4 x + 3 |
        - | 5 x + 4 | = – 3
    - Halle el Intervalo de x en cada una de las siguientes desigualdades:
        - | 2 x + 1 | ≤ 1
            - – 1 ≤ 2 x + 1 ≤ 1
            - – 2 ≤ 2 x ≤ 0
            - – 1 ≤ x ≤ 0
            - x Є [– 1, 0]



        - | x^2 – 2 | ≤ 1 [5]
        - | x – 5 | > 2
        - | x | < 3

2.5 Ejercicios de la Unidad

- Halle los valores de x correspondientes que satisfagan las siguientes ecuaciones
    - | 4x + 3 | = 7
    - | 5x – 3 | = | 3x + 5 |
    - | 3x – 4 | = 2
- Halle el Conjunto de Soluciones de las desigualdades indicadas (Intervalo), y grafíquelas en la Recta de Números Reales
    - 5x + 2 > x – 6
    - 13 ≥ 2x – 3 ≤ 5
    - 2 > -3 -3x ≥ - 7
    - $4x^2$ + 9x < 9
    - $4x^2$ + 16x < 16
    - 15 ≥ 4x – 7 ≤ 2
- Obtenga los valores de x para los cuales el número dado es real
    - $\sqrt{8x-5}$
    - $\sqrt{x^2-3x-10}$

---

[5] x = $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

- $\sqrt{x^2 - 5x + 4}$
- $\sqrt{9x - 4}$

¡¡¡Recuerda: cualquier número dividido entre cero dará como resultado una indeterminación!!!

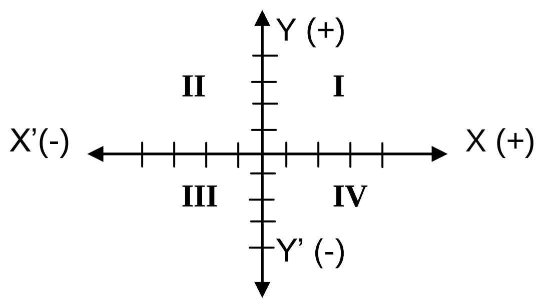
Productos Notables:

- Cuadrado de una Suma o de una Resta:
  - $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- Suma por Diferencia:
  - $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

3 Funciones.

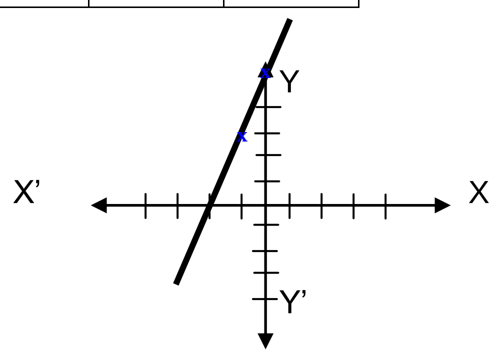
3.1 Sistema de Eje de Coordenados (Coordenadas) Rectangulares.

- Sobre una Recta $\overline{XX'}$ (eje de abscisas), se toma un punto O (Origen) por donde se traza una Recta Perpendicular $\overline{YY'}$ (eje de ordenadas). Se establece una unidad, y se gradúan ambos ejes a partir del O. La abscisa se gradúa positivamente hacia la derecha, y negativamente hacia la izquierda. La ordenada se gradúa positivamente hacia arriba y negativamente hacia abajo. Los Ejes de Abscisas y de Ordenadas dividen el Plan en cuatro (4) cuadrantes. Las coordenadas de un punto se designan: a (x, y).



- A cada punto de un Plano le corresponde un único Par ordenado (x, y), y a cada pareja (x, y) se le asocia un solo punto.
- Gráfica de la Ecuación:
- Ejercicios:
  - Grafique las siguientes ecuaciones:
    - y = 2 x + 5

x	0	-1
y	5	3



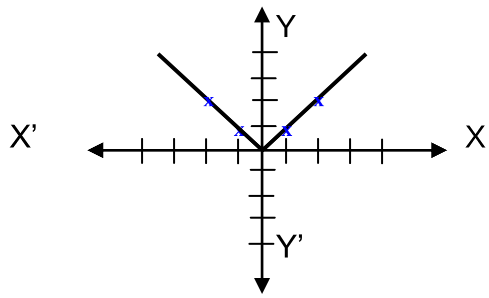
    - y = 4 x – 3
    - x = y^2 + 1

- $x = -3$
- $y = 2$

3.2 Conceptos de Función.

- Función:
  - Conjunto de parejas ordenadas de números (x, y), en el cual no hay dos parejas ordenadas distintas que tengan el mismo primer número.
  - "y" o f (x) es una función de "x", si existe alguna regla por medio del cual se asigne un valor único a "y" o f (x), para cada valor correspondiente de "x".
- Dominio:
  - Conjunto de todos los valores posibles de "x" (Primera Componente o Conjunto de Salida).
- Rango:
  - Conjunto de todos los valores posibles de "y" o $f(x)$ (Segunda Componente, Recorrido, Imagen o Contradominio).
- Variables:
  - Como el valor de "y" depende del valor de "x":
    - "y": variable dependiente
    - "x": variable independiente
- Ejercicios:
  - Dadas las siguientes funciones, halle el Dominio, Rango, y grafique la misma.
    - $h = \{ (x, y) \mid y = |x| \}$

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	0	1	2



Dom = (- ∞ , ∞)

Rango = [0, ∞)

- $y = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

- $g = \left\{ (x, y) \mid y = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} \right\}$

- $f = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

Toda recta, excepto las verticales, es una Función.

3.3 Operaciones con Funciones.

- Suma
  - (f + g) (x) = f (x) + g(x)
- Diferencia
  - (f – g) (x) = f (x) – g(x)
- Producto
  - (f . g) (x) = f (x) . g(x)
- Cociente
  - (f / g) (x) = f (x) / g(x)

- En cada caso, el Dominio de f (x) ∧ g(x) = Dominio f (x) ∩ Dominio g(x).
- En el caso del Cociente, se excluyen los valores de x para los cuales g(x) = 0.

- Ejercicios:
    - Sea $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = \sqrt{x-4}$, halle la nueva Función y el dominio resultantes:
        - (f + g)(x)
            - (f + g)(x) = $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-4}$
            - Dom f (x) = [– 1, ∞)
            - Dom g(x) = [4, ∞)
            - Dom (f +g)(x) = [4, ∞)
        - (f – g) (x)
        - (f . g) (x)
        - (f / g) (x)

3.4 Función Compuesta.

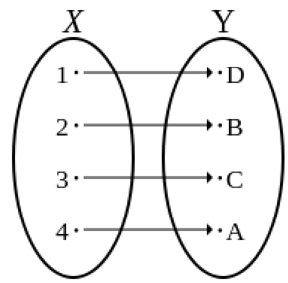
- ($f \circ$ g)(x) = f [g (x)]
- (g $\circ f$)(x) = g [f (x)]
- ($f \circ f$)(x) = f [f (x)]
- (g $\circ$ g)(x) = g [g (x)]
- El Dominio de ($f \circ$ g) es el conjunto de todos los números x en el Dominio de g, tales que g (x) se encuentre en el dominio de f.
- Ejemplo:
    - Sean f (x) = $\sqrt{x}$ y g (x) = 2 x – 3. Halle $f \circ$ g y determine su Dominio.
        - $f \circ$ g (x) = f [g (x)]
        - $f \circ$ g (x) = f [2 x – 3]
        - $f \circ$ g (x) = $\sqrt{2x-3}$
        - Dom $f \circ$ g (x) → 2 x – 3 ≥ 0 → x ≥ 3/2 →
        - Dom $f \circ$ g (x) = [3/2, ∞)
    - Sean f (x) = $\sqrt{x}$ y g (x) = 2 x – 3. Halle g $\circ f$ y determine su Dominio.
        - g $\circ f$ (x) = g [f (x)]
        - g $\circ f$ (x) = g [$\sqrt{x}$]
        - g $\circ f$ (x) = 2 $\sqrt{x}$ - 3

        - Dom $g \circ f$ (x) → x ≥ 0 →
        - Dom $g \circ f$ (x) = [0, ∞)

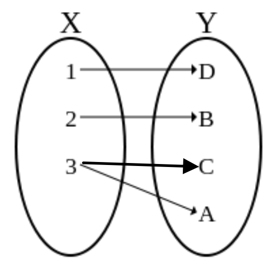
- Ejercicios:
    - Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y g (x) = $x^2 - 1$. Halle F(x) y determine su Dominio.
        - F(x) = $f \circ g$
        - F(x) = $g \circ f$
        - F(x) = $f \circ f$
        - F(x) = $g \circ g$

3.5 Otros tipos de Funciones.

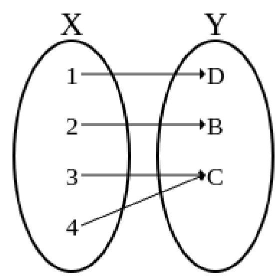
- Función Biyectiva:
    - Una función es biyectiva si todos los elementos del conjunto de salida tienen una imagen distinta en el conjunto de llegada, y a cada elemento del conjunto de llegada le corresponde un elemento del conjunto de salida. (Ej: Una función lineal)



- Función Inyectiva:
    - Una función es inyectiva cuando la Pre-Imagen (x) de cualquier elemento del Rango (y) es una sola.
    - Se reconoce porque se traza una recta horizontal en el gráfico, y lo corta en una oportunidad.



- Función Sobreyectiva:
    - Una función es sobreyectiva cuando cada elemento de "y" es la imagen de como mínimo un elemento de "x".



- Función Par:
    - f es Par si:
        - $\forall$ x $\in$ A, f (– x) = f (x)
        - $f_P(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$
- Función Impar:
    - f es Impar si:

- $\forall$ x $\in$ A, f (– x) = - f (x)
- $f_I(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$

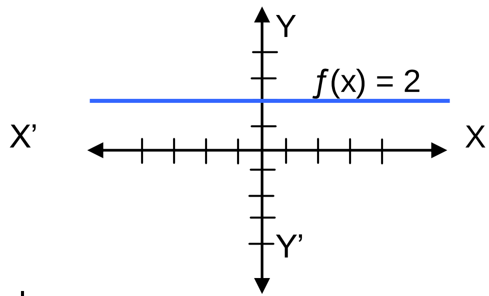
$$\boxed{f(x) = f_I(x) + f_P(x)}$$

- Halle f_P (x) y f_I (x) para las siguientes funciones:
  - f (x) = 5 x^3 – 3 x^2 + x + 6
    - f (-x) = 5 $(-x)^3$ – 3 $(-x)^2$ + (-x) + 6
    - f (-x) = - 5 x^3 – 3 x^2 – x + 6
    - $f_P(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \rightarrow$
    - $f_P(x) = \dfrac{(5x^3 - 3x^2 + x + 6) + (-5x^3 - 3x^2 - x + 6)}{2} \rightarrow$
    - $f_P(x) = \dfrac{5x^3 - 3x^2 + x + 6 - 5x^3 - 3x^2 - x + 6}{2} \rightarrow$
    - $f_P(x) = \dfrac{\cancel{5x^3} - 3x^2 + \cancel{x} + 6 - \cancel{5x^3} - 3x^2 - \cancel{x} + 6}{2} \rightarrow$
    - $f_P(x) = \dfrac{-6x^2 + 12}{2} \rightarrow$
    - $f_P(x) = -3x^2 + 6$
    - $f_I(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \rightarrow$
    - $f_I(x) = \dfrac{(5x^3 - 3x^2 + x + 6) - (-5x^3 - 3x^2 - x + 6)}{2} \rightarrow$
    - $f_I(x) = \dfrac{5x^3 - \cancel{3x^2} + x + \cancel{6} + 5x^3 + \cancel{3x^2} + x - \cancel{6}}{2} \rightarrow$

- $f_I(x) = \dfrac{10x^3 + 2x}{2}$ →
- $f_P(x) = 5x^3 + x$
  - $g(x) = 2x^4 + 5x^3 - x^2 + 8$
  - $h(x) = 3x^4 - 2x^2 + 7$
  - $f(x) = 2x^5 + 5x^3 - 8x$
  - g (x) = sen x
  - h (x) = cos x

> En las Funciones Par, la Gráfica es simétrica al Eje Y.
>
> En las Funciones Impar, la Gráfica es simétrica respecto al Origen.

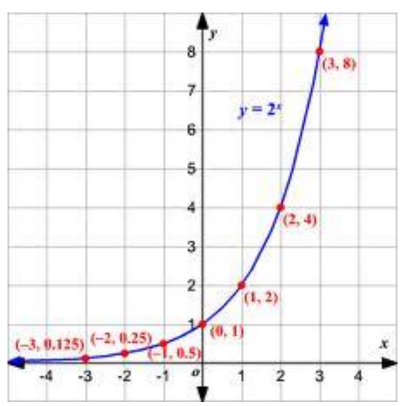
- Función Creciente:
  - f es creciente si:
    - $x_1 \leq x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
  - f es estrictamente creciente si:
    - $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Función Decreciente:
  - f es decreciente si:
    - $x_1 \leq x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
  - f es estrictamente creciente si:
    - $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- Función Constante:
  - El Rango sólo consta de un número. Su gráfica es una línea recta paralela al Eje x (abcisa).



- Función Polinomial:
    - Su grado viene dado por el mayor exponente en el Polinomio.
        - Función Lineal: 1er Grado (Función Identidad)
        - Función Cuadrática: 2do Grado
        - Función Cúbica: 3er Grado
        - Función Polinomial de Grado n: n *ésimo* grado
- Función Racional:
    - Función que se puede expresar como el cociente de dos funciones polinomiales.
    - $f(x) = \dfrac{3x+2}{x^2+3x+2}$
- Funciones Trascendentes:
    - Funciones Trigonométricas (sen x, cos x, etc.)
    - Funciones Logarítmicas (log x, Ln x)
    - Funciones Exponenciales (e^x)
- Funciones Periódicas:
    - Función con Período p ≠ 0, si siempre que x esté en el dominio de f, entonces x + p también estará en el Dominio de f.
        - f (x+p) = f(x)
        - Ejemplo:
            - sen 0° = 0 ; cos 0° = 1
            - sen 360° = 0 ; cos 360° = 1
            - sen 720° = 0 ; cos 720° = 1
- Funciones Acotadas y No Acotadas:
    - Función Acotada: $f(x) = 3x^2 + x$; Dom x = [– 1, 10)
    - Función No Acotada: $f(x) = 3x^2 + x$; Dom x = **R**

3.6 Ejercicios de la Unidad.

- Encuentre el Dominio y Rango de la Función dada, y grafique la función:
  - $y = 3x - 1$
  - $y = 3x + 2$
  - $y = x^2 - 1$
  - $y = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ x - 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
  - $y = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 3 \\ 2x - 1 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$
- Dadas las Funciones, halle $F(x) = f(x) \circ g(x)$ y $G(x) = g(x) \circ f(x)$:
  - $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 - 1$
  - $f(x) = x - 5$ y $g(x) = x^2 - 1$
  - $f(x) = 5 - x$ y $g(x) = x^2 - 4$
- Determine la Función Par y la Función Impar de las Funciones dadas:
  - $f(x) = 2x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 7x + 1$
  - $g(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 2x - 8$
  - $f(x) = 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 8x + 7$
  - $f(x) = 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 - 9x + 4$



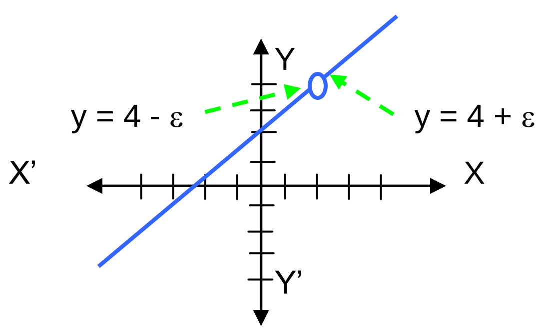
4 Límites.

4.1 Límite.

- ¿Qué pasaría si en una Función f(x) tal que: $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$, se debe hallar f(2)?
  - $f(2)=\frac{2^2-4}{2-2}$ → $f(2)=\frac{0}{0}$ → $f(2)=\infty$
- Definición de Límite:
  - Sea f una Función definida en todo número de algún intervalo abierto (a, b) que contenga a ***a***, excepto posiblemente, en el número ***a*** mismo.
  - El Límite de f(x) cuando x tiende a ***a*** es L, y se escribe:
    - $\lim_{x\to a} f(x)=L$

      si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un δ tal que:
      - $| f(x) - L | < \varepsilon$ siempre que $0 < | x - a | < \delta$
  - Ejemplo:
    - $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ →
    - $f(x)=\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)}$ → $f(x)=x+2$

x	1,90	1,95	1,99	2,01	2,05	2,10
y	3,9	3,95	3,99	4,01	4,05	4,10



$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$$

Existirá un | f(x) – 4 | < ε siempre que 0 < | x – 2 | < δ

4,01 – 4 < ε — 0 < 2,01 – 2 < δ

0,01 < ε — 0 < 0,01 < δ

- Ejemplo:
  - Sea f(x) = 4 x – 1. Dado $\lim_{x \to 3} 4x - 1 = 11$, hallar una δ para ε = 0,01, tal que | f(x) – 11 | < 0,01 siempre que 0 < | x – 3 | < δ
    - | f(x) – 11 | < 0,01 → | 4 x – 1 – 11 | < 0,01 →
    - | 4 x – 12 | < 0,01 → 4 | x – 3 | < 0,01 →
    - | x – 3 | < 0,0025 siempre que 0 < | x – 3 | < δ
    - Tomamos δ = 0,0025
    - Entonces: | (4 x – 1) – 11 | < 0,01 siempre que 0 < | x – 3 | < 0,0025
  - Dada la Función f(x) = 2 x – 3 y dado ε = 0,001, encontrar δ > 0, tal que | f(x) – 1 | < ε, siempre que 0 < | x – 2 | < δ.
    - | f(x) – 1 | < 0,001 → | 2 x – 3 – 1 | < 0,001 →
    - | 2 x – 4 | < 0,001 → 2 | x – 2 | < 0,001 →
    - | x – 2 | < 0,0005 →
    - Tomamos δ = 0,0005

Teorema de Unicidad

  - Si $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, entonces $L_1 = L_2$.
  - Una Función no puede tender hacia dos límites distintos al mismo tiempo.

- Definición de Cauchy (Repaso)
  - ∀ ε > 0, ∃ δ > 0 tal que :
    - | f(x) – L | < ε siempre que 0 < | x – a | < δ

4.2 Teoremas de Límites.

- Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces:
  - $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$
  - $\lim_{x \to a} [f(x).g(x)] = L.M$
  - $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L.}{M}$ (M ≠ 0)
- Si m y b son dos constantes cualesquiera:
  - $\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$
- Si c es una constante,
  - $\lim_{x \to a} c = c$
- $\lim_{x \to a} x = a$
- Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y n ∈ N ∧ n ≠ 0,
  - $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = L^n$
- Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces
  - $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$

    (Si L > 0 ∧ n ∈ N ∨ L ≤ 0 ∧ n es entero impar positivo)
- ∀ a ≠ 0, $\lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$
- Si n ∈ N ∧ n ≠ 0,
  - $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$
  - Si (a > 0) ∨ (a ≤ 0 ∧ n es impar)
- Si $\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x \to a} f_2(x) = L_2$, …, $\lim_{x \to a} f_n(x) = L_n$:
  - $\lim_{x \to a} [f_1(x) \pm f_2(x) \pm ... \pm f_n(x)] = L_1 \pm L_2 \pm ... \pm L_n$

- $\lim_{x \to a} [f_1(x).f_2(x).---.f_n(x)] = L_1.L_2.---.L_n$

- Ejemplos:
  - $\lim_{x \to 2} (3x+5)$
    - $\lim_{x \to 2} (3x+5) = 3.2+5$
    - $\lim_{x \to 2} (3x+5) = 11$
  - $\lim_{x \to a} (7)$
    - $\lim_{x \to a} (7) = 7$
  - $\lim_{x \to -6} (x)$
    - $\lim_{x \to -6} (x) = -6$
  - $\lim_{x \to 3} x(2x+1)$
    - $\lim_{x \to 3} x(2x+1) = \lim_{x \to 3} x.\lim_{x \to 3} (2x+1)$
    - $\lim_{x \to 3} x(2x+1) = 3.(2.3+1)$
    - $\lim_{x \to 3} x(2x+1) = 21$
  - $\lim_{x \to -2} (5x+7)^4$
    - $\lim_{x \to -2} (5x+7)^4 = [\lim_{x \to -2} (5x+7)]^4$
    - $\lim_{x \to -2} (5x+7)^4 = [-3]^4$
    - $\lim_{x \to -2} (5x+7)^4 = 81$
  - $\lim_{x \to 3} \frac{(x^3-27)}{x-3}$
    - $\lim_{x \to 3} \frac{(x^3-27)}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)}$

- $\lim_{x\to 3}(x^2+3x+9)=\lim_{x\to 3}(x^2)+\lim_{x\to 3}(3x)+\lim_{x\to 3}(9)$
- $\lim_{x\to 3}(x^2+3x+9)=3^2+3.3+9$
- $\lim_{x\to 3}(x^2+3x+9)=27$

- Límite Bilateral
  - $\lim_{x\to a} f(x)=L$
- Límites Unilaterales
  - El Límite de f (x) cuando x se aproxima a ***a*** por la derecha es L:
    - $\lim_{x\to a^+} f(x)=L$
    - | f(x) – L | < ε siempre que 0 < | x – a | < δ
  - El Límite de f (x) cuando x se aproxima a ***a*** por la izquierda es L:
    - $\lim_{x\to a^-} f(x)=L$
    - | f(x) – L | < ε siempre que 0 < | a – x | < δ
- El Límite Bilateral existe cuando los Límites Unilaterales son iguales.
  - $\lim_{x\to a} f(x)=L \wedge \lim_{x\to a} f(x)\exists$ ssi $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=L$
- Ejercicios:
  - En las siguientes Funciones, halle los límites Unilaterales y el Límite Bilateral si existe, en el valor dado.
    - $g(x)=\sqrt{x-4}$ (x → 4)
      - $\lim_{x\to 4^+}\sqrt{x-4}=0$
      - $\lim_{x\to 4^-}\sqrt{x-4}=i$
      - $\lim_{x\to 4}\sqrt{x-4}=Indefinido$
    - f(x) = sgn(x) = $\begin{cases} -1 \text{ si } x<0 \\ 0 \text{ si } x=0 \\ 1 \text{ si } x>0 \end{cases}$ (x → 0)

- $g(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
- $h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 + x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ 5 - x & \text{si } x > 3 \end{cases}$

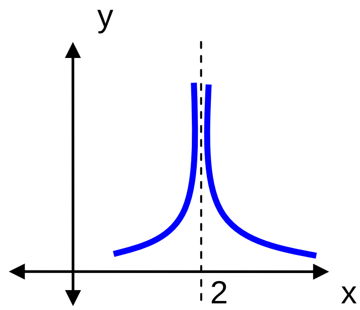
4.3 Límites Infinitos.

- Sea f la función definida por:
  - $f(x) = \dfrac{3}{(x-2)^2}$
  - Cuando se hace que x tienda a 2 por la izquierda, se verá que conforme la x se acerca a 2, a través de valores menores a 2, $f(x)$ crece sin límite. Cuando se hace que x tienda a 2 por la derecha, se verá que conforme la x se acerca a 2, a través de valores mayores a 2, también crece sin límite.

x	3/2	5/3	7/4	19/10	199/100	1999/1000
$f(x)$	12	27	48	300	30.000	3.000.000

x	5/2	7/3	9/4	21/10	201/100	2001/1000
$f(x)$	12	27	48	300	30.000	3.000.000

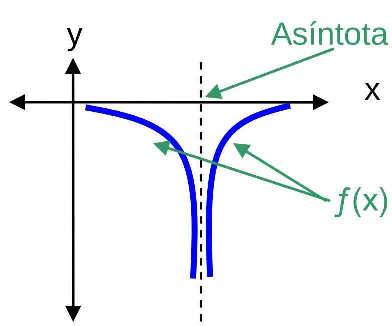
  - $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{3}{(x-2)^2} = \infty$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3}{(x-2)^2} = \infty$
  - Por lo tanto,
    - $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3}{(x-2)^2} = \infty$



- Cuando x tiende a ***a***, f(x) crece sin límite.
  - $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$
- Cuando x tiende a ***a***, f(x) decrece sin límite.
  - $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$
- Evalúe
  - $f(x) = -\dfrac{3}{(x-2)^2}$
  - $g(x) = \dfrac{2x}{(x-1)}$

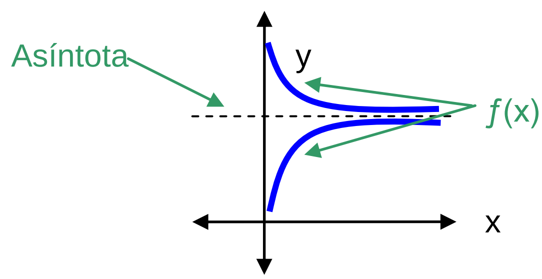
4.4 Asíntota Vertical.

- La recta x = a es una Asíntota Vertical, si por lo menos se cumple uno de los siguientes enunciados:
  - $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$
  - $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$
  - $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$
  - $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$



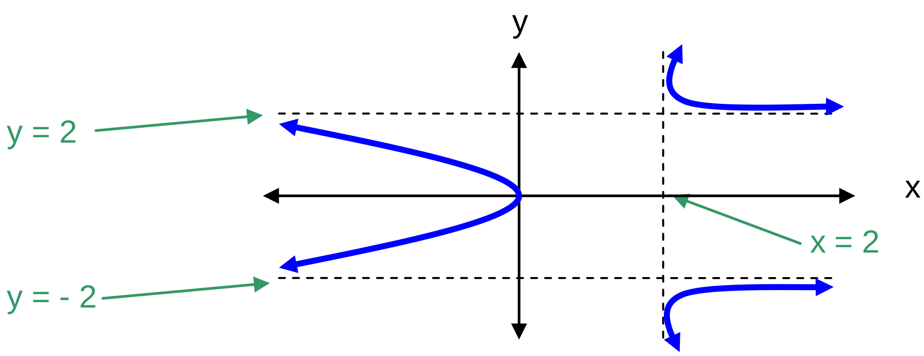
4.5 Asíntota Horizontal.

- La recta y = b es una Asíntota Horizontal, si por lo menos se cumple uno de los siguientes enunciados:
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, y para algún número N, f(x) ≠ b, siempre que x > N.
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, y para algún número N, f(x) ≠ b, siempre que x < N.



- Ejemplo:
  - Determine Asíntota Vertical y Horizontal de la gráfica de la Ecuación: x y^2 – 2 y^2 – 4 x = 0
    - y^2 (x– 2) – 4 = 0 → y^2 (x– 2) = 4 →
    - $y^2 = \frac{4x}{x-2}$ → $y = \pm 2\sqrt{\frac{x}{x-2}}$
    - $f_1(x) = 2\sqrt{\frac{x}{x-2}}$; $f_2(x) = -2\sqrt{\frac{x}{x-2}}$
    - Esta Ecuación define dos funciones.
    - Se evalúa primero f_1(x):
      - $\lim\limits_{x \to 2^+} 2\sqrt{\frac{x}{x-2}} = +\infty$ → x = 2 es Asíntota Vertical
      - $\lim\limits_{x \to +\infty} 2\sqrt{\frac{x}{x-2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2\sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}} = 2$ → y = 2 es Asíntota Horizontal
    - Ahora se evalúa f_2(x):
      - $\lim\limits_{x \to 2^+} -2\sqrt{\frac{x}{x-2}} = -\infty$ → x = 2 es Asíntota Vertical

- $\lim_{x\to+\infty} -2\sqrt{\frac{x}{x-2}} = \lim_{x\to+\infty} -2\sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}} = -2$ → y = – 2 es Asíntota Horizontal



- Ejercicios:
  - Halle las Asíntotas Verticales y Horizontales a las gráficas de las siguientes Funciones:
    - $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$
    - $g(x) = \frac{4-3x}{x+1}$
    - $h(x) = 1 - \frac{1}{x}$

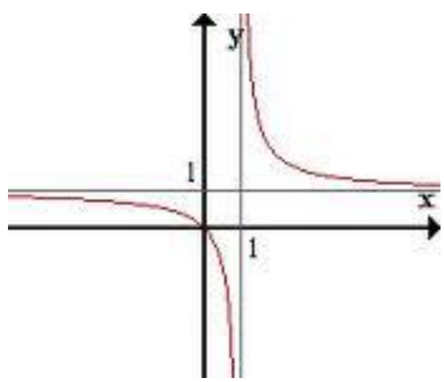
4.6 Ejercicios de la Unidad.

- Halle el Valor de los siguientes Límites:
  - $\lim_{x\to 2} (4x-8)$
  - $\lim_{x\to -2} (3x^2+4x-5)$
  - $\lim_{x\to 2} (5x+2)^2$
  - $\lim_{x\to 1} (x-1)$
  - $\lim_{x\to 2} (4x^3+9x-1)$
  - $\lim_{x\to 5} (3x-7)$

- $\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x - 1)$

- Trace la gráfica y determine si el Límite Bilateral existe:
  - $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \\ -3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
  - $f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{si } x \leq -4 \\ 4 - x & \text{si } x > 4 \end{cases}$
  - $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < 3 \\ 3 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$
  - $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Trace la gráfica de la función y encuentre las Asíntotas Verticales y Horizontales
  - $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 - 9}$
  - $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 3}$
  - $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$



5 Continuidad

5.1 Función Continua

- La función f es continua en el número a, ssi se cumplen las tres (3) condiciones siguientes:
  - f(a) $\exists$
  - $\lim_{x \to a} f(x)$ $\exists$
  - $\lim_{x \to a} f(x)$ = f(a)
- Si una o más de estas tres (3) condiciones no se cumplen para a, se dice que la función f es discontinua en a.

5.2 Continuidad por la Izquierda o por la Derecha

- La función f es continua en a por la Derecha, si:
  - f(a) $\exists$
  - $\lim_{x \to a^+} f(x)$ $\exists$
  - $\lim_{x \to a^+} f(x)$ = f(a)
- La función f es continua en a por la Izquierda, si:
  - f(a) $\exists$
  - $\lim_{x \to a^-} f(x)$ $\exists$
  - $\lim_{x \to a^-} f(x)$ = f(a)

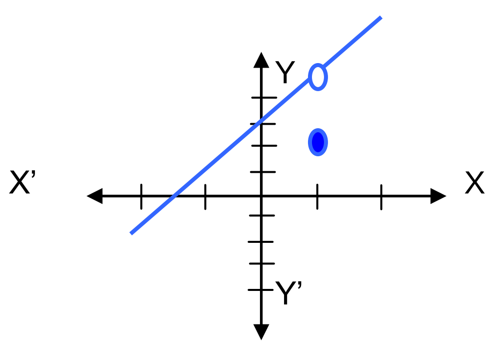
5.3 Conjunto Continuo

- La Función f es continua en un Conjunto, si es continua en cada uno de sus puntos.
  - f es continua en el Intervalo abierto (a, b), si f es continua en x, $\forall$ x $\in$ (a, b).
  - f es continua en el Intervalo cerrado [a, b], si f es continua en (a, b), si es continua por la derecha en a, y si es continua por la izquierda en b.

- El Rango de un Intervalo Cerrado de una Función Continua, es también un Intervalo Cerrado.
- Si f es una Función continua en el Intervalo Cerrado [a, b], entonces f(x) alcanza un valor máximo M, un valor mínimo m, y cualquier valor entre M y m.

5.4 Discontinuidad

- Discontinuidad Eliminable:
  - Es aquella que puede ser redefinida para hacer a la Función f(x) continua.
- Discontinuidad Esencial:
  - Es aquella Función donde no puede redefinirse (eliminarse) la discontinuidad.
- Ejemplos:
  - Determine si hay o no continuidad en las siguientes Funciones; grafique y determine si la discontinuidad es eliminable o esencial.
    - $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+x-3}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$
      - $f(1) = 2$
      - $\lim_{x \to 1} f(x) = 2.1 + 3 \to \lim_{x \to 1} f(x) = 5$
      - $\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$ (No es continua en x = 1).



- La discontinuidad de f(x) puede ser eliminable al redefinir la misma:
  - $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+x-3}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 5 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

▪ $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

▪ $h(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{si } x \leq 1 \\ 3 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

▪ $f(x) = \begin{cases} |x - 3| & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

5.5 Ejercicios de la Unidad

- Determine si hay o no continuidad en las siguientes Funciones; grafique y determine si la discontinuidad es eliminable o esencial:

a. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \\ 4 - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{|x-3|} & \text{si } x \neq 3 \\ 0 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

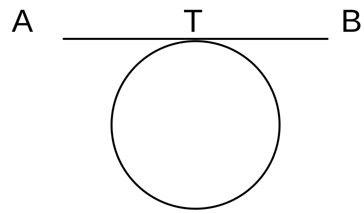
c. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{si } x < 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \\ 9 - x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

d. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{|x-2|} & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

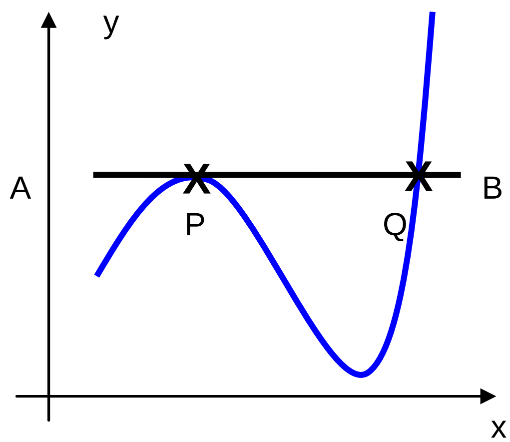
6 Derivadas

6.1 Generalidades

- Recta Tangente: línea recta que corta a una figura cualquiera, en un solo punto.
    - Ejemplo:



    - La recta $\overline{AB}$ es tangente a la circunferencia dada, en el punto T.
    - Pero si tenemos curvas en general, ese concepto podría no aplicarse:



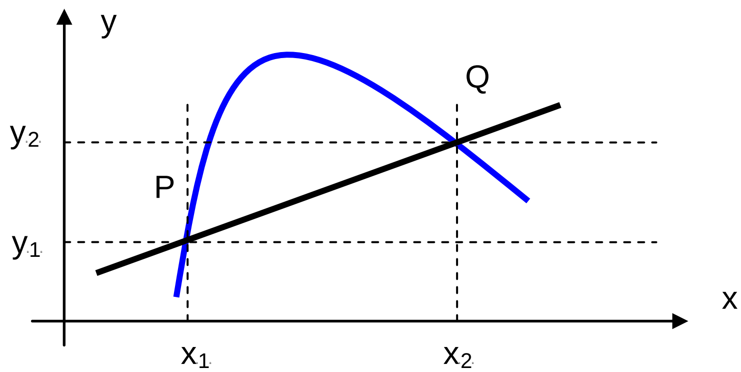
    - Vemos que la recta $\overline{AB}$ corta a la curva en el Punto P, pero también en el Punto Q. En este caso, sería una recta secante.

- Pendiente de una Recta:
    - La pendiente de una Recta no paralela al Eje y, viene dada por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Delta y = m.\Delta x$$

    - Hallemos la pendiente de la recta $\overline{PQ}$ cualquiera:



- $\Delta y = y_2 - y_1 \rightarrow \Delta f(x) = f_2(x) - f_1(x)$
- $\Delta x = x_2 - x_1$
- $m_{PQ} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$
- Si desplazamos el Punto Q en dirección al Punto P, Δx tenderá a cero (0).
- Si $\Delta x = x_2 - x_1 \rightarrow x_2 = x_1 + \Delta x$
- Entonces, reemplazando:
- $m_{PQ} = \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$
- Si $\lim\limits_{\Delta x \to 0} m_{PQ} = +\infty$ o $\lim\limits_{\Delta x \to 0} m_{PQ} = -\infty$, la recta $\overline{PQ}$ se aproxima a la recta que pasa por P.
- Entonces, la recta tangente a la gráfica de f, en el Punto P es:
  - $m_{x_1} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ si el límite existe
  - $x = x_1$, si $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \pm\infty$
- Si no se cumple ninguna de las dos condiciones, no existe recta tangente a la gráfica de f en el Punto P $(x_1, f(x_1))$.

- Ejercicios:
  - Dada la parábola $y = x^2$. Determine la pendiente de la recta secante a través de los puntos:
    - (2, 4) – (3, 9)

- $m = \frac{9-4}{3-2} \Rightarrow m = \frac{5}{1} \Rightarrow m = 5$
- (2, 4) – (2.1, 4.41)
- (2, 4) – (2.01, 4.0401)

- Dada la parábola y = x^2. Determine la pendiente de la recta tangente en el punto (2, 4)
  - $m_{(2)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} \Rightarrow m_{(2)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 - (2)^2}{\Delta x} \Rightarrow$
  - $m_{(2)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x + \Delta x^2 - 4}{\Delta x} \Rightarrow m_{(2)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \Rightarrow$
  - $m_{(2)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(4+\Delta x)}{\Delta x} \Rightarrow m_{(2)} = \lim_{\Delta x \to 0} 4 + \Delta x \Rightarrow m_{(2)} = 4$
- Dada la curva y = x^2 – 4 x + 3. Encontrar la pendiente de la recta tangente en el punto (5,8).

6.2 Derivada

- Llamaremos Derivada de *ƒ* en el Punto x, a la pendiente de la recta tangente a la Gráfica de *ƒ* en el Punto (x, *ƒ*(x)).
- Si tal tangente no existe, diremos que no existe la Derivada.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- **Teorema**: si una Función *ƒ* es diferenciable (derivable) en x_1, entonces *ƒ* es continua en x_1.
- Ejemplos:
  - Dada *ƒ*(x)= x^2, hallar *ƒ*'(3)
    - $f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} \Rightarrow f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3+\Delta x)^2 - (3)^2}{\Delta x} \Rightarrow$
    - $f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{9 + 6\Delta x + \Delta x^2 - 9}{\Delta x} \Rightarrow f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \Rightarrow$
    - $f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(6+\Delta x)}{\Delta x} \Rightarrow f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} 6 + \Delta x \Rightarrow f'(3) = 6$

- Dada g(x)= | x |, hallar g'(0)
- Dada h(x)= 3 x^2 + 12, hallar h'(x)

- Otras Notaciones de las Derivadas:

  f'(x) y' $\frac{dy}{dx}$ $\frac{df(x)}{dx}$ $D_x y$

- Ejercicios:
  - Dada $y=\frac{2+x}{3-x}$, hallar $D_x y$
  - Dada $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}}$, hallar f'(x)

6.3 Derivadas Unilaterales

- Si f está definida en x_1, entonces la Derivada por la Derecha de f en x_1 está definida como:
  - $f_+'(x)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$
  - $f_+'(x)=\lim_{\Delta x\to x_1^+}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$
- Si f está definida en x_1, entonces la Derivada por la Izquierda de f en x_1 está definida como:
  - $f_-'(x)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$
  - $f_-'(x)=\lim_{\Delta x\to x_1^-}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$

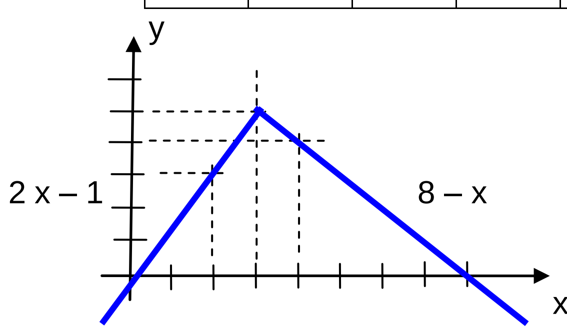
6.4 Diferenciabilidad

- Una Función puede no ser diferenciable en un punto a, por;
  - La función f es discontinua en a.
  - La función f es continua en a y la gráfica de f tiene una recta vertical en el punto x = a.

- La función f es continua en a y la gráfica de f no tiene una recta tangente en el punto x = a.
- La función f es continua en a, pero $f'_+(a) \neq f'_-(a)$.

- Ejemplo:
  - Sea $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ 8 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$
    - Trazar la gráfica
    - Hallar si f(x) es continua en 3
    - Hallar Derivadas Unilaterales en 3
    - Hallar si f es diferenciable en 3
      - Gráfica

x	1	2	3	4	5
y	1	3	5	4	3



- Condiciones de Continuidad
  - (1) $f(a)\ \exists \rightarrow f(3) = 5$
  - $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (2x-1) = 2.3 - 1 = 5$
  - $\lim_{x\to 3+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (8-x) = 8 - 3 = 5$
  - (2) $\lim_{x\to 3+} f(x) = \lim_{x\to 3-} f(x)$
  - (3) $\lim_{x\to 3} f(x) = f(a)$
  - **f(x) es continua en x = 3**

- Derivadas Unilaterales
    - $f_-'(3) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} \Rightarrow$
    - $f_-'(3) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{[2(3+\Delta x)-1]-5}{\Delta x} \Rightarrow$
    - $f_-'(3) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{6+2\Delta x-1-5}{\Delta x} \Rightarrow$
    - $f_-'(3) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{2\Delta x}{\Delta x} \Rightarrow f_-'(3) = 2$
    - $f_+'(3) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} \Rightarrow$
    - $f_+'(3) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{[8-(3+\Delta x)]-5}{\Delta x} \Rightarrow$
    - $f_+'(3) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{8-3-\Delta x-5}{\Delta x} \Rightarrow$
    - $f_+'(3) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{-\Delta x}{\Delta x} \Rightarrow f_+'(3) = -1$
    - $f_+'(3) \neq f_-'(3)$
    - ***f*(x) no es diferenciable en x = 3.**

- Sea *ƒ*(x)= | 1 – x^2 |
    - Trazar la gráfica
    - Hallar si *ƒ*(x) es continua en 1
    - Hallar si *ƒ* es diferenciable en 1
- Sea *ƒ*(x)= $\begin{cases} 1/x & \text{si } x < b \\ 1 - \frac{1}{4}x & \text{si } x \geq b \end{cases}$
    - Hallar el valor de b para el cual *ƒ* es continua
    - Determinar si *ƒ*(x) es diferenciable en el valor de b hallado (continuo).

6.5 Derivadas de Funciones Algebraicas

- Derivadas de las Funciones:
  - Si f(x) = c; f'(x) = 0 (La derivada de una constante es cero)
  - Si $f(x)= x^n$; $f'(x) = n.x^{n-1}$
  - Si g(x) = c. f(x); g'(x) = c. f'(x)
  - Si h(x) = f(x) + g(x); h'(x) = f'(x)+ g'(x)
  - Si h (x) = f(x) . g(x); h'(x) = f(x) . g'(x) + f'(x) . g(x)
  - Si $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}, \forall g(x)\neq 0; h'(x)=\dfrac{g(x).f'(x)-f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$
  - Si $f(x) = x^{-n} \wedge x\neq 0 \wedge -n$ es entero negativo; $f'(x) = -\ n.x^{-n-1}$
  - Si $f(x)=x^{\frac{p}{q}}; f'(x)=\dfrac{p.x^{p-1}}{q(\sqrt[q]{x^p})^{q-1}}$
  - Si $f(x) = \dfrac{1}{f(x)}$; $f'(x) = -\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2}$
  - Si f(x) = Ln x; $f'(x) = \dfrac{1}{x}$
  - Si $f(x)= [g(x)]^n$; $f'(x) = n.[g(x)]^{n-1}.g'(x)$
  - Si $f(x)= e^x$; $f'(x) = e^x$
  - Si f(x) = sen x; f'(x) = cos x
  - Si f(x) = cos x; f'(x) = - sen x
  - Si f(x) = csec x; f'(x) = - ctan x . csec x
  - Si f(x) = sec x; f'(x) = tan x . sec x
  - Si f(x) = tan x; $f'(x) = \sec^2 x$
  - Si f(x) = ctan x; $f'(x) = -\ \mathrm{csec}^2\ x$
- Ejercicios:
  - Si f(x) = 5; f'(x) = 0
  - Si $f(x) = x^8$; $f'(x) = 8\ x^7$
  - Si $f(x) = 7\ x^4 - 2\ x^3 + 8\ x + 5$; $f'(x) = 28\ x^3 - 6\ x^2 + 8$
  - Si $f(x) = (2x^3 - 4\ x^2).(3\ x^5 + x^2)$; $f'(x) = (2x^3 - 4\ x^2).(15\ x^4 + 2\ x) + (3\ x^5 + x^2).(6\ x^2 - 8\ x) \rightarrow f'(x) = 48\ x^7 - 84\ x^6 + 10\ x^4 - 16\ x^3$
  - Si $f(x)=\dfrac{2x^3+4}{x^2-4x+1}; f'(x)=\dfrac{2x^4-16x^3+6x^2-8x+16}{(x^2-4x+1)^2}$

- Si $f(x)=\frac{3}{x^5}$ (f(x) = 3. x^{-5}) ; f'(x) = 3. (-5 . x^{-6}) → f'(x) = - 15 x^{-6} → $f'(x)=-\frac{15}{x^6}$
- Si f(x) = x^2 . sen x; f'(x) = x^2 . cos x + 2 x sen x
- Si $f(x)=\frac{senx}{1-2\cos x}$; $f'(x)=\frac{(1-2\cos x)(senx)'-(senx)(1-2\cos x)'}{(1-2\cos x)^2}$ → $f'(x)=\frac{\cos x-2}{(1-2\cos x)^2}$

6.6 Derivadas de Función Compuesta

- Derivadas de Función Compuesta:
  - (f ∘ g)(x) = f [g (x)]
  - Regla de la Cadena:
    - (f ∘ g)'(x) = f' [g (x)].g'(x)
    - f[g(x)]' = f' [g (x)].g'(x)
- Ejercicios:
  - f(x) = sen (x^2); f'(x) = 2 x cos (x^2)
  - f(x) = sen^2 x → f(x) = (sen x)^2; f'(x) = 2.sen.cos x → f'(x) = sen 2x
  - f(x) = x^{10} ∧ g(x) = 2 x^3 – 5 x^2 + 4; (f ∘ g)'(x) = 10[g(x)]^9.(6 x^2 -10 x) → (f ∘ g)'(x) = 10.(2 x^3 – 5 x^2 + 4)^9.(6 x^2 – 10 x)
  - f(x) = sen 4 x; f'(x) = 4.cos 4 x
  - f(x) = (tan x)$^{2/3}$; $f'(x)=\frac{2}{3}.\frac{\sec^2 x}{\sqrt[3]{\tan x}}$
  - f(x) = cos g(x) ; f'(x) = – g'(x). sen g(x)
  - f(x) = tan g(x) ; f'(x) = g'(x). sec^2 g(x)
  - f(x) = csec g(x) ; f'(x) = – g'(x). csec g(x).ctan g(x)
  - f(x) = Ln |g(x)| ; $f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$

6.7 Diferenciación Implícita

- Si y = 3 x^2 + 5 x + 1, dicha ecuación define explícitamente la Función f(x).

- Pero $x^6 – 2x = 3y^6 + y^5 – y^2$ no puede resolverse explícitamente. Esa ecuación se puede redefinir:
  - $F(x) = x^6 – 2x$
  - $G(x) = 3y^6 + y^5 – y^2$ [$y = f(x)$]
  - Entonces $F(x) = G[f(x)]$
- Suponiendo que la ecuación dada ($x^6 – 2x = 3y^6 + y^5 – y^2$) define a y como una Función diferenciable de x, podemos encontrar la Derivada de y con respecto a x, mediante la Diferenciación o Derivación Implícita.
  - $(x^6 – 2x) = (3y^6 + y^5 – y^2)$
  - $6x^5 – 2 = (18y^5 + 5y^4 – 2y)\,D_x y$
  - $D_x y = \dfrac{6x^5 - 2}{18y^5 + 5y^4 - 2y}$
- Ejemplos:
  - Sea $3x^4y^2 – 7xy^3 = 4 – 8y$. Halle $D_x y$.
    - $12x^3y^2 + 3x^4(2y.D_x y) – 7y^3 – 7x(3y^2.D_x y) = 0 – 8.D_x y$
    - $D_x y = \dfrac{7y^3 - 12x^3.y^2}{6x^4y - 21xy^2 + 8}$
  - Sea $(x + y)^2 – (x – y)^2 = x^4 + y^4$. Halle $D_x y$.
    - $2(x+y).(1+ D_x y) – 2(x-y).(1- D_x y) = 4x^3 + 4y^3.D_x y$
    - $D_x y = \dfrac{x^3 - y}{x - y^3}$

6.8 Derivadas de Orden Superior

- Si f' es la derivada de la función f, entonces f' también es una función (Primera Derivada de f o Primera Función Derivada).
- Si la Derivada de f' existe, recibe el nombre de Segunda Derivada de f o Segunda Función Derivada (f'' o f biprima).
- Si la Derivada de f'' existe, recibe el nombre de Tercera Derivada de f o Tercera Función Derivada (f''' o f triprima).

- La n-ésima Derivada de la función f, donde n es entero y n > 1, es la Primera Derivada de la (n – 1)-ésima Derivada de f ($f^{(n)}$).
- Ejemplo:
    - Sea $f(x) = 8x^4 + 5x^3 - x^2 + 7$; halle sus derivadas.
        - $f'(x) = 32x^3 + 15x^2 - 2x$
        - $f''(x) = 96x^2 + 30x - 2$
        - $f'''(x) = 192x + 30$
        - $f^{(4)}(x) = 192$
        - $f^{(5)}(x) = 0$
        - $f^{(n)}(x) = 0$; $n \geq 5$

6.9 Ejercicios de la Unidad

6.9.1 Derivadas.

(01) $y = \dfrac{1}{x^2}$

(02) $y = \sqrt[3]{x}$

(03) $y = \dfrac{5}{(2x)^3}$

(04) $y = \dfrac{7}{(3x)^{-2}}$

(05) $y = 2senx$

(06) $f(x) = \dfrac{senx}{2}$

(07) $g(x) = x + \cos x$

(08) $h(x) = \dfrac{5x-2}{x^2+1}$

(09) $f(t) = \dfrac{3-\left(\frac{1}{t}\right)}{t+5}$

(10) $y = \theta - \tan\theta$

(11) $g(x) = x^3 \cos x$

(12) $h(x) = \dfrac{senx}{x^2}$

(13) $y = x^2 senx$

(14) $y = \dfrac{\cos\theta}{\theta}$

(15) $y = -c\sec x - senx$

6.9.2 Regla de la Cadena.

(01) $f(x) = sen2x$

(02) $y = \cos(x-1)$

(03) $y = \tan 3x$

(04) $g(x) = \sqrt{\cos x}$

(05) $h(x) = \cos 3x^2$

(06) $f(t) = (3t - 2t^2)^3$

(07) $g(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$

(08) $h(x) = \sqrt{x^2+1}$

(09) $f(\theta) = sen6\theta$

(10) $y = (3x+2)^5$

(11) $g(x) = x + \tan x^2$

(12) $h(x) = (x^2+1)^3$

(13) $y = e^{4x}$

(14) $y = sen2t.\cos 2t$

(15) $y = \dfrac{sen^2 2\theta}{4}$

6.9.3 Derivadas Implícitas.

(01) $x^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$

(02) $x^2 + y^2 = 16$

(06) $x^3 - 3x^2y + 2xy^2 = 12$

(07) $senx + 2\cos 2y = 1$

(11) $x^3 + y^3 = 8$

(12) $x^2y + y^2x = -2$

(03) $x^{1/2} + y^{1/2} = 9$

(04) $x^3 - xy + y^2 = 4$

(05) $x^3 y^3 - y = x$

(08) $senx = x(1 + \tan y)$

(09) $y = sen(xy)$

(10) $x^2 - y^2 = 16$

(13) $2senx \cos y = 1$

(14) $\cot y = x - y$

(15) $x = \sec \frac{1}{y}$

6.9.4 Derivadas de Orden Superior.

- Encuentre la 2da Derivada de las siguientes funciones:

(01) $y = 4x^{3/2}$

(02) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

(03) $g(x) = 3senx$

(04) $f(t) = t^3 - 3t + 2$

(05) $h(\theta) = 3\tan\theta$

(06) $y = \sec x$

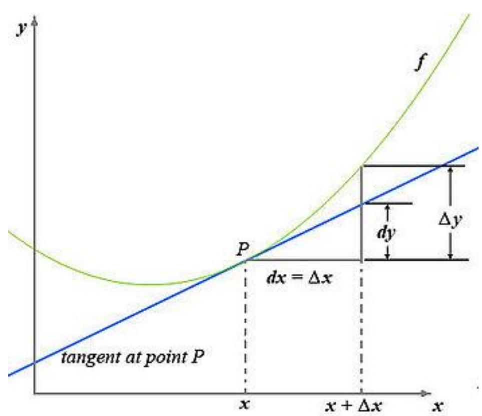
- Encuentre la Derivada indicada:

(07) $y' = x^2; y''$

(08) $f'''(x) = 2\sqrt{x}; f^{(4)}(x)$

(09) $g''(x) = 2 - \frac{2}{x}; g'''(x)$

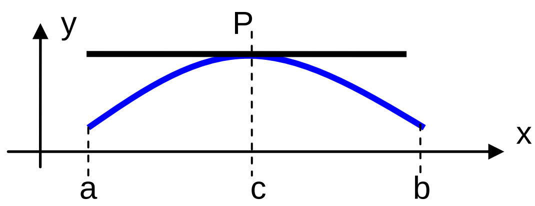
(10) $y^{(4)} = 2x + 1; y^{(6)}$



7 Aplicaciones de las Derivadas

7.1 Teorema de Rolle[6]

- Sea una función f, continua en el intervalo cerrado [a, b], diferenciable en el intervalo abierto (a, b), y tal que $f(a) = 0$ y $f(b) = 0$, entonces existe al menos un número c, entre a y b, para el cual $f'(c) = 0$.



- Ejemplo:
  - Dada $f(x) = 4x^3 - 9x$, verificar que se cumple el Teorema de Rolle para los intervalos dados, y hallar el valor para los cuales $f'(c) = 0$: [- 3/2 , 0], [0, 3/2], [- 3/2, 3/2]
    - $f'(x) = 12x^2 - 9$
      - $f(x)$ existe $\forall x \in R$
      - $f(x)$ es continua y diferenciable
      - Para aplicar Teorema de Rolle, $f(a) = 0$ y $f(b) = 0$
        - $4x^3 - 9x = 0$
        - $x(4x^2 - 9) = 0$

$x = 0$	$4x^2 - 9 = 0$ $x^2 = 9/4$ $x = \pm 3/2$

        - $x_1=0$; $x_2= -3/2$; $x_3= 3/2$
      - $x = -3/2 \wedge x = 0$ son válidos en [- 3/2 , 0]
      - $x = 0 \wedge x = 3/2$ son válidos en [0, 3/2]
      - $x = -3/2 \wedge x = 3/2$ son válidos en [- 3/2, 3/2]

[6] Michel Rolle, matemático francés

- Para encontrar valores adecuados de c, hacemos $f'(x) = 0$:
  - $f'(x) = 12x^2 - 9$
  - $12x^2 - 9 = 0$
  - $x^2 = \frac{9}{12} \Rightarrow x = \pm\frac{3}{\sqrt{12}} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $c = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ es válido en [- 3/2 , 0]
- $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$ es válido en [0, 3/2]
- $c = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ son válidos en [- 3/2, 3/2]

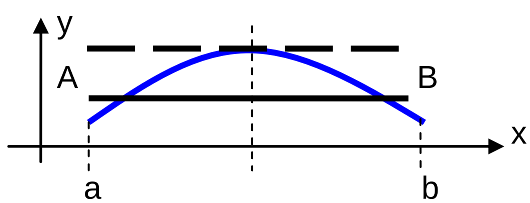
- Ejercicios:
  - $f(x) = x^2 - 4x + 3$; [1, 3]
  - $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$; [1, 2]
  - $f(x) = \text{sen } 2x$; [0, ½ π]

7.2 Teorema de Lagrange[7] o del Valor Medio

- Sea f una función tal que:
  - sea continua en [a, b]
  - sea diferenciable en (a, b)

  Entonces existe un número c en (a, b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



- (Existe algún punto entre A y B, donde la recta tangente es paralela a la recta secante que pasa por A y B).

[7] Joseph-Louis Lagrange, matemático, físico y astrónomo italiano

- Ejemplo:
  - Dada $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$. Verificar que el Teorema del Valor Medio es válido para a = 1 y b = 3. Encontrar los valores de c en (a, b) tal que se cumpla el Teorema del Valor Medio.
    - $f(x)$ es polinomial, por lo que es continua y diferenciable para $\forall x \in R$.
    - $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$
    - Se hallan $f(a)$ y $f(b)$: $f(1) = -7$; $f(3) = -27$
    - Se deriva: $f'(x) = 3x^2 - 10x - 3$
    - $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \rightarrow f'(c) = \dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} \Rightarrow$
    - $f'(c) = \dfrac{-27 - (-7)}{2} \Rightarrow f'(c) = -\dfrac{20}{2} \Rightarrow f'(c) = -10$
    - Haciendo $f'(c) = -10 \rightarrow$
      - $3c^2 - 10c - 3 = -10$
      - $3c^2 - 10c + 7 = 0$
      - $c_1 = 7/3$; $c_2 = 1$
    - Como c = 1 no está en el intervalo (1, 3), el único valor que cumple la condición es c = 7/3.
- Ejercicios:
  - Compruebe que en las siguientes funciones se cumple la Hipótesis del Teorema del Valor Medio, en el Intervalo dado. Luego halle un valor adecuado de c, que cumpla con el Teorema del Valor Medio:
    - $f(x) = x^2 + 2x - 1$; [0, 1]
    - $f(x) = x^3 + x^2 - x$; [-2, 1]
    - $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x - 7}$; [2, 6]

7.3 Regla de L'Hopital[8]

- Existe un Método para encontrar el límite (si existe), de una función en un número que tenga forma indeterminada $\frac{0}{0}$:
  - Sean f y g funciones diferenciables en un intervalo abierto (a, b), excepto posiblemente en c $\in$ (a, b). Si $\forall$ x ≠ c $\in$ (a, b), g'(x) ≠ 0, entonces:
    - Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ = $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ = 0, y si $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.
  - El Teorema es válido si todos los límites son límites por la derecha o límites por la izquierda.
- Ejemplo:
  - Calcular $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 3x - 4}$
  - $\lim\limits_{x\to 4} x^2 - x - 12 = 0$
  - $\lim\limits_{x\to 4} x^2 - 3x - 4 = 0$
  - $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 3x - 4} = \frac{0}{0}$ (Indeterminado)

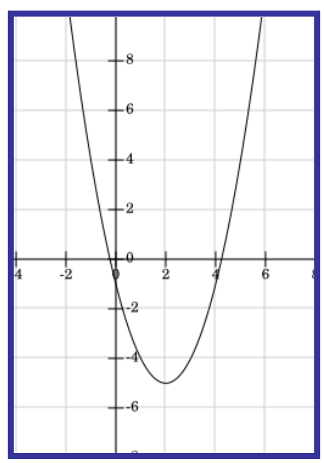
x^2 – x – 12 = (x – 4)(x + 3) x^2 – 3 x – 4 = (x – 4)(x + 1) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 3x - 4} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+3)}{(x-4)(x+1)} \Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 4} \frac{(x+3)}{(x+1)} = \frac{7}{5}$	(x^2 – x – 12)' = 2 x -1 (x^2 – 3 x – 4)' = 2 x – 3 $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 3x - 4} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 4} \frac{(2x-1)}{(2x-3)} = \frac{7}{5}$

[8] Guillaume Francois L'Hopital, matemático francés

- Ejercicios:
  - Calcular:
    - $\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
    - $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$
    - $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

7.4 Funciones Crecientes y Decrecientes

- Una Función f definida en un intervalo es creciente en dicho Intervalo, ssi $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$, donde $x_1 \wedge x_2 \in$ al Intervalo.
- Una Función f definida en un intervalo es decreciente en dicho Intervalo, ssi $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$, donde $x_1 \wedge x_2 \in$ al Intervalo.
- Si una Función es creciente o decreciente en un intervalo, se dice que es monótona en el intervalo.
- Sea f una función continua en el intervalo cerrado [a, b] y diferenciable en el intervalo abierto (a, b):
  - si $f'(x) > 0 \ \forall \ x \in (a, b)$, f es creciente en [a, b]
  - si $f'(x) < 0 \ \forall \ x \in (a, b)$, f es decreciente en [a, b]
- Ejemplo:
  - Determine los intervalos en los cuales f es creciente y decreciente:
    - $f(x) = x^2 - 4x - 1$
    - $f'(x) = 2x - 4$
      - $2x - 4 > 0$ (creciente) $\rightarrow x > 2$
      - $2x - 4 < 0$ (creciente) $\rightarrow x < 2$
    - Creciente en $x \in (2, \infty)$ y Decreciente en $x \in (-\infty, 2)$



Función x^2-4x-1 graficada en fooplot.com

- Ejercicios:
    - $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$
    - $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2$
    - $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

7.5 Fórmula de Taylor[9]

- Sea f una Función tal que f y sus primeras n derivadas sean continuas en [a, b]. Además, $f^{(n+1)}(x)$ existe para todo x en (a, b). Entonces hay un número ε en (a, b) tal que:

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

- Ejemplo:
    - Sea $f(x) = \frac{1}{x-2}$; a = 1 $\wedge$ n = 3. Aplique la Fórmula de Taylor.
        - $f'(x) = -(x-2)^{-2} \Rightarrow$
        - $f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$
        - $f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3}$
        - $f'''(x) = -\frac{6}{(x-2)^4}$
        - $f^{(4)}(x) = \frac{24}{(x-2)^5}$
            - $f(x) = (-1) - (x-1) - (x-1)^2 - (x-1)^3 + \frac{(x-1)^4}{(\varepsilon-2)^5}$

            para ε entre 1 y x.

- Ejercicios:
    - $f(x) = \frac{1}{x-2}$; a = 1; n = 3
    - $g(x) = \sqrt{x}$; a = 4; n = 4
    - h(x) = tan x; a = 0 ; n = 3

7.6 Razón de Cambio

- $f'(x)$ nos da la intensidad de cambio de $f(x)$, por unidad de cambio en x.

[9] Brook Taylor. Matemático Inglés.

- $f''(x)$ nos da la intensidad de cambio de $f'(x)$, por unidad de cambio en x.
- Si (x, y) es cualquier punto de $y = f(x)$, y' da la pendiente de la recta tangente en dicho punto (x, y). y'' es la intensidad de cambio de la pendiente de la recta tangente con respecto a x en el punto (x, y).
- Ejemplo:
    - Sea m(x) la pendiente de la recta tangente a $y = x^3 - 2x^2 + x$ en el punto (x, y). Halle la intensidad de cambio de la pendiente de la recta tangente (m) por Unidad de cambio en x, en el punto (2, 2).
        - $m(x) = y'$
        - $y' = 3x^2 - 4x + 1$
        - $m(x) = 3x^2 - 4x + 1$
        - $y'' = m'(x) = 6x - 4$
        - $m'(2) = 6.2 - 4$
        - $m'(2) = 8$
        - En el punto (2, 2) el cambio en m es 8 veces el cambio en x.

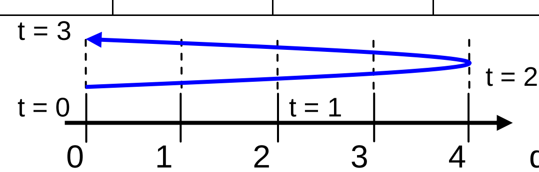
7.7 Velocidad y Aceleración

- En el movimiento rectilíneo, si $f(t)$ es la distancia de una partícula desde el origen a los t segundos,
    - $f'(t)$ constituye la velocidad de la partícula a los t seg.
    - $f''(t)$ es la intensidad de cambio instantánea de la velocidad a los t seg. (aceleración instantánea)
    - $d = f(t)$
    - $v = f'(t)$ (velocidad instantánea)
    - $a = f''(t)$ (aceleración instantánea)
- Entonces, se puede concluir :
    - Si $v \geq 0 \wedge a > 0$, la rapidez aumenta
    - Si $v \geq 0 \wedge a < 0$, la rapidez disminuye

- Si $v \leq 0 \wedge a > 0$, la rapidez disminuye
- Si $v \leq 0 \wedge a < 0$, la rapidez aumenta

- Ejemplo :
  - Una partícula se desplaza a lo largo de una recta horizontal, de acuerdo a la ecuación: $d = 3\,t^2 - t^3$; $t \geq 0$.
    - $v = d'(t)$; $a = d''(t) \rightarrow a = v'(t)$
    - $v = 6\,t - 3\,t^2$
    - $a = 6 - 6\,t$
    - Se puede concluir :
      - $d = 0$, cuando $t = 0 \vee t = 3$
      - $v = 0$, cuando $t = 0 \vee t = 2$
      - $a = 0$, cuando $t = 0 \vee t = 1$

t	D	v	a
0	0	0	6
1	2	3	0
2	4	0	-6
3	0	-9	-12

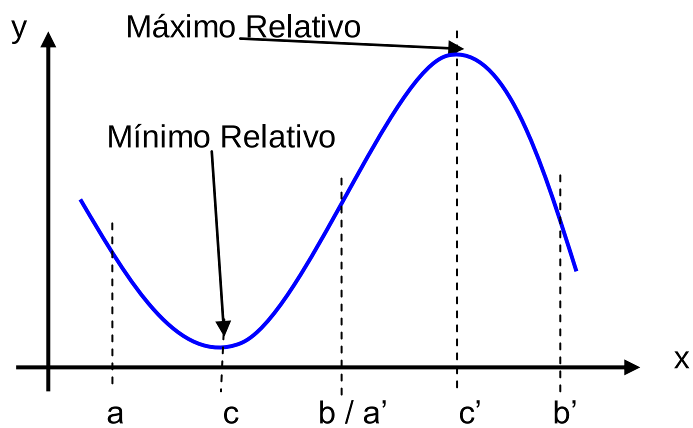


  - Una partícula se desplaza a lo largo de una línea recta, de acuerdo a la ecuación de movimiento: $d = \frac{1}{2}t^2 + \frac{4t}{t+1}$. Determine t, d y v cuando a = 0.
  - Una partícula se desplaza a lo largo de una recta horizontal de acuerdo a la ecuación: $d = 2\,t^3 - 4\,t^2 + 2\,t - 1$. Determine intervalos de tiempo cuando la partícula se desplace a la derecha y a la izquierda. Determine el instante t en que cambia de sentido el movimiento.
  - Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba, desde el suelo, con velocidad inicial de 20 m/seg. Si el sentido positivo de la

distancia, desde el punto de partida, es hacia arriba, la ecuación de movimiento es: $d = -5t^2 + 20t$. Halle v cuando t = 1; v cuando t = 3; t en el punto más alto; altura máxima de la pelota; t y v cuando llega al suelo.

7.8 Valor Máximo y Mínimo de f(x)

- Una función f tiene un valor máximo relativo <u>en c</u>, si existe un intervalo abierto que contenga a c, en el cual f esté definida, tal que:
  - $f(c) \geq f(x)\ \forall$ x en el Intervalo.
- Una función f tiene un valor mínimo relativo <u>en c</u>, si existe un intervalo abierto que contenga a c, en el cual f esté definida, tal que:
  - $f(c) \leq f(x)\ \forall$ x en el Intervalo.
- Si la función f tiene un valor máximo o mínimo relativo <u>en c</u>, se dice que f tiene un valor extremo relativo en c.



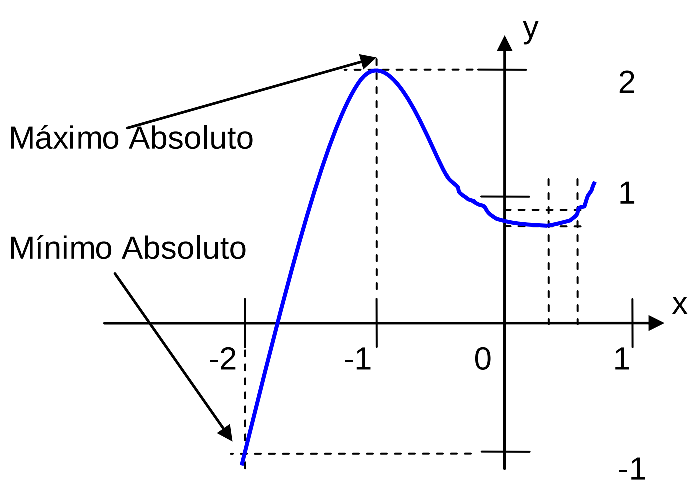
- Si c es un número en el dominio de la función f, y si $f'(c) = 0$ ó $f'(c)$ no existe, entonces c se denomina como Punto Crítico de f.
- Una Función f tiene un valor máximo absoluto <u>en un intervalo</u>, si existe algún número c en el intervalo, tal que $f(c) \geq f(x)\ \forall$ x en dicho intervalo. En ese caso, $f(c)$ es el valor máximo absoluto de f en todo el intervalo.
- Una Función f tiene un valor mínimo absoluto <u>en un intervalo</u>, si existe algún número c en el intervalo, tal que $f(c) \leq f(x)\ \forall$ x en dicho intervalo. En ese caso, $f(c)$ es el valor mínimo absoluto de f en todo el intervalo.

Una función puede o no tener un extremo absoluto en un intervalo dado.

- Se dice que f(c) es el valor máximo absoluto de la función f, si c está en el dominio de f y si $f(c) \geq f(x)$ $\forall$ x en el dominio de f.
- Se dice que f(c) es el valor mínimo absoluto de la función f, si c está en el dominio de f y si $f(c) \leq f(x)$ $\forall$ x en el dominio de f.
- Para hallar máximos y mínimos, en un intervalo, se hallan los números críticos y se evalúan, al igual que los extremos del intervalo, en f(x). El mayor de los valores de f(x) indica el máximo, así como el menor de los valores indica el mínimo.
- Ejemplo:
  - Sea $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$. Halle los números críticos. Halle los extremos absolutos de f(x) en [-2 , ½]. Grafique f(x).
    - $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$
    - Condición para número crítico: $f'(x) = 0$
    - Entonces:
      - $3x^2 + 2x - 1 = 0$
      - $x_1 = ⅓$; $x_2 = -1$
    - Números Críticos: $x_1 = ⅓$; $x_2 = -1$
    - Extremos absolutos:

x	-2	-1	⅓	½
***f*(x)**	-1	2	22/27	7/8

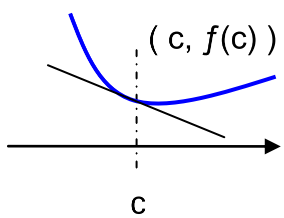
- En (-1, 2) hay un máximo absoluto
- En (-2, -1) hay un mínimo absoluto

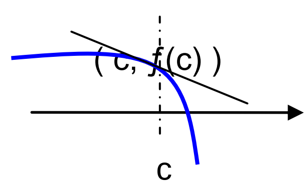


- Ejercicios:
    - Halle los números críticos y extremos absolutos de las siguientes funciones:
        - $f(x) = -x^2$ en (-3, 2]
        - $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ en (-1, 1)
        - $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 6x + 7 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en [-5, 4]
        - $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ en [1, 5]

7.9 Concavidad y Punto de Inflexión

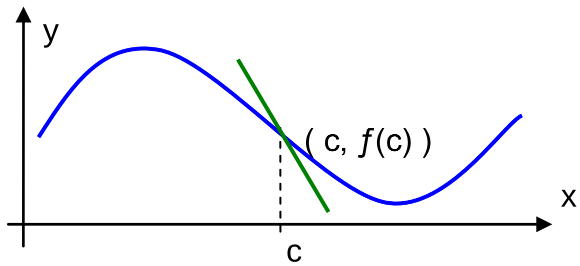
- La gráfica de una Función f es cóncava hacia arriba, en el punto (c, f(c)), si existe f'(c) y si existe un intervalo abierto (a, b) que contenga a c, tal que para todos los valores de x ≠ c en (a, b), el punto (x, f(x)) en la gráfica esté arriba de la recta tangente a la gráfica en (c, f(c)).





- La gráfica de una Función f es cóncava hacia abajo, en el punto (c, f(c)), si existe f'(c) y si existe un intervalo abierto (a, b) que contenga a c, tal que para todos los valores de x ≠ c en (a, b), el punto (x, f(x)) en la gráfica esté debajo de la recta tangente a la gráfica en (c, f(c)).
- Sea f una Función diferenciable en un intervalo abierto (a, b) que contenga a c. Entonces:
    - Si f''(c) > 0, la gráfica de f es cóncava hacia arriba en (c, f(c)).
    - Si f''(c) < 0, la gráfica de f es cóncava hacia abajo en (c, f(c)).
- Un Punto de Inflexión es el punto de una Gráfica donde cambia el sentido de la concavidad, y donde la Gráfica corta a su recta tangente

- El punto (c, f(c)) es un Punto de Inflexión de la gráfica de la Función f, si la gráfica tiene en ese punto una recta tangente y si existe un intervalo abierto (a, b) que contenga a c, tal que si x $\in$ (a, b), entonces:
  - ($f''(x) < 0$ si $x < c$) $\wedge$ ($f''(x) > 0$ si $x > c$) ó
  - ($f''(x) > 0$ si $x < c$) $\wedge$ ($f''(x) < 0$ si $x > c$)



- Ejemplo:
  - Halle los Puntos de Inflexión de la Gráfica de f(x), y determine dónde la Gráfica es cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo en la función: $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

    $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

    $f''(x) = 6x + 2$

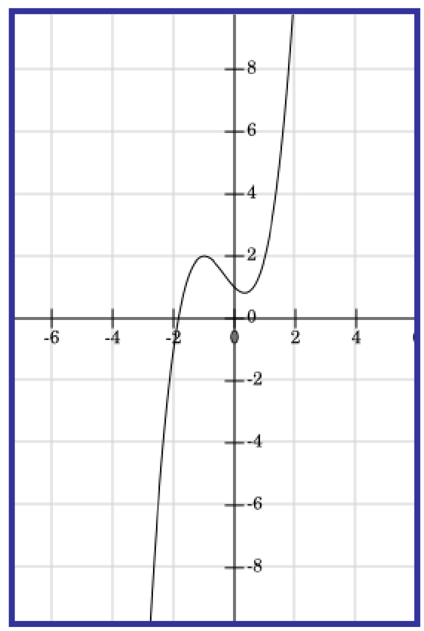
    $6x + 2 = 0$

    Punto de inflexión: $x = -\frac{1}{3}$

    El punto de inflexión hallado genera dos intervalos, por lo que se evalúa la 2da Derivada antes y después del mismo.

    $f''(-1) = -4$ (<0 → Cóncava hacia abajo)

    $f''(0) = 2$ (>0 → Cóncava hacia arriba)



$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ graficada en fooplot.com

    La función es Cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty, -\frac{1}{3})$, y es Cóncava hacia arriba en el intervalo $(-\frac{1}{3}, \infty)$
  - Ejercicios:
    - $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

- $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - \frac{5}{3}$
- $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 4x + \frac{8}{3}$
- $f(x) = x^2 - 5x + 6$

7.10 Ejercicios de la Unidad

7.10.1 Teorema de Rolle.

(01) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ [1,2]

(02) $f(x) = x^4 - 2x^2$ [-2,2]

(03) $f(x) = x^2 + 3x - 4$ [-4,1]

(04) $f(x) = x^2 - 2x$ [0,2]

(05) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 2}$ [-1,3]

(06) $f(x) = \text{sen } x$ [0,2π]

7.10.2 Teorema de Lagrange o del Valor Medio.

(01) $f(x) = 5 - \frac{4}{x}$ [1,4]

(02) $f(x) = x^2$ [-2,1]

(03) $f(x) = x^{2/3}$ [0,1]

(04) $f(x) = \sqrt{2 - x}$ [-7,2]

(05) $f(x) = \text{sen } x$ [0,π]

7.10.3 Regla de L'Hôpital.

(01) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$

(02) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}$

(03) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}}$

(04) $\lim_{x \to \infty} e^{-x}\sqrt{x}$

(05) $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$

(06) $\lim_{x \to 3} \frac{2(x-3)}{x^2 - 9}$

7.10.4 Intervalos de Crecimiento y Decrecimiento, Puntos Críticos, Inflexión, Máximos y Mínimos, Concavidad.

(01) $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$

(02) $f(x) = \frac{1}{2}x - \text{sen } x$ [0,2π]

(03) $f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$

(04) $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$

8 Primitivas

8.1 Antiderivación

- Es la Operación inversa de la Derivación
- Una Función F se llama Antiderivada de una Función f, en un intervalo dado, si:
  - F'(x) = f(x) ∀ x en el Intervalo.
- Ejemplo:
  - Sea F(x) = 4 x^3 + x^2 + 5
    - F'(x) = 12 x^2 + 2x
    - f(x) = 12 x^2 + 2x
  - Sea G(x) = 4 x^3 + x^2 – 17
    - G'(x) = 12 x^2 + 2x
    - g(x) = 12 x^2 + 2x
- Como f(x) = g(x), una Función G(x) = F(x) + k.
- Como G(x) es cualquier antiderivada de f en el Intervalo, cualquier antiderivada de f en el intervalo se puede obtener a partir de :
  - F(x) + c (donde c es una constante arbitraria)
- Si F'(x) = f(x), d[f(x)] = f(x) dx

8.2 Diferenciación

- Si y = f(x), cuando f(x)' existe:
  - $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \Delta y = f'(x)\Delta x$
- Si la función f está definida por y = f(x), la diferencial de y (dy) está dada por:
  - dy = f'(x) dx
- Ejemplo:
  - y = 3 x^2 – x
    - f(x) = 3 x^2 – x
    - f'(x) = 6 x – 1
    - dy = (6 x – 1) dx

- Como dy = $f'(x)$ dx,
    - $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, si dx ≠ 0.

8.3 Antidiferenciación

- La operación inversa del Diferencial de una Función, consiste en hallar la Función más general que tenga una diferencial dada.
- También se considera como la operación que consiste en calcular la función más general que tenga una derivada dada.
    - $\int f(x)dx = F(x) + c$

    - $\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$ (Fórmula de la Antiderivada o Primitiva)

8.4 Integral Definida

- Si f es una Función definida en el intervalo cerrado [a, b], entonces la integral definida de f, de a a b, está dada por:
    - $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta_i x$$
    - Si el límite existe.

f(x)	Integrando
a	Límite Inferior
b	Límite Superior
$\int$	Signo de Integración

9 Integral de Riemann[10]

9.1 Sumatoria.

- Se denota con la letra Sigma mayúscula griega (que corresponde a la letra “S”).
- Tiene la forma: $\sum_{i=m}^{n} i$, donde *m* y *n* son números enteros, y donde *m* representa el límite o extremo inferior y *n* representa el límite o extremo superior.
- Ejemplo:
  - $\sum_{i=3}^{5} i^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 = 9 + 16 + 25 = 50$
- Teoremas de Sumatoria:
  - $\sum_{i=1}^{n} c = c.n$ (donde c es cualquier constante)
  - $\sum_{i=1}^{n} c.f(i) = c.\sum_{i=1}^{n} f(i)$
  - $\sum_{i=1}^{n} [f(i) + g(i)] = \sum_{i=1}^{n} f(i) + \sum_{i=1}^{n} g(i)$
  - $\sum_{i=a}^{b} f(i) = \sum_{i=a+c}^{b+c} f(i-c)$
  - $\sum_{i=a}^{b} f(i) = \sum_{i=a-c}^{b-c} f(i+c)$
  - $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
  - $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
  - $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
  - $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$

[10] Matemático alemán. Friedrich Bernhard Riemann.

- Ejemplo:
    - Calcule $\sum_{i=1}^{n} i(3i-2)$

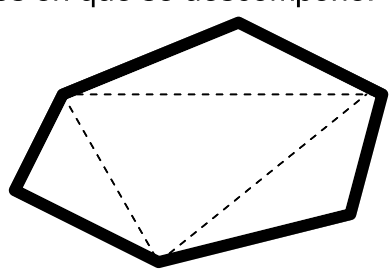
$$\sum_{i=1}^{n} i(3i-2) = \sum_{i=1}^{n}(3i^2-2i) = \sum_{i=1}^{n}3i^2 + \sum_{i=1}^{n}(-2i) = 3\sum_{i=1}^{n}i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}i =$$

$$= 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n^3+n^2-n}{2}$$

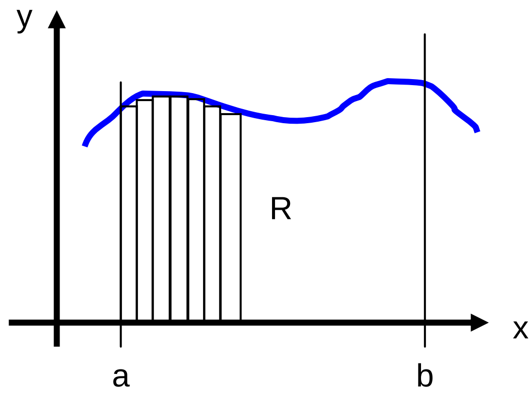
- Ejercicios:
    - $\sum_{i=2}^{5}\frac{i}{i-1}$
    - $\sum_{i=1}^{7}(i+1)^2$
    - $\sum_{i=-2}^{3}2^i$

9.2 Área de Polígonos y Área bajo la curva.

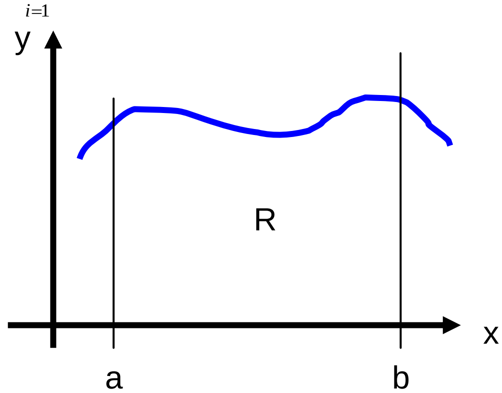
- Área de Polígonos:
    - Puede definirse como la sumatoria de las áreas de los triángulos en que se descompone.



- Área de una Región en un Plano (Área bajo la curva):
    - Consideremos la Región ***R*** en el Plano, acotada por el eje x (abcisa), por las rectas x=a y x=b, y la curva tiene la ecuación y= f(x), donde f es una función continua en [a , b]. Tomemos f(x) ≥ 0 ∀ x ∈ [a , b].



- Se divide el intervalo [a , b] en n subintervalos, de igual longitud (Δx), desde $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, … , $x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x$, $x_n = b$.
- Como f es una función continua en [a , b], también es continua en cada subintervalo.
- Por el Teorema del Valor Extremo (máximos y mínimos absolutos), se sabe que existe un número ***c***, para el cual f tiene un valor mínimo absoluto.
- Entonces, se consideran *n* rectángulos, cada uno con Δx unidades de ancho y $f(c)$ unidades de alto, y sea S_n unidades cuadradas la suma de las áreas de los *n* rectángulos, entonces:
- $S_n = f(c_1).\ \Delta x + f(c_2).\ \Delta x + \ldots + f(c_i).\ \Delta x + \ldots + f(c_n).\ \Delta x$
- Lo que es igual a:
  - $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$



- Si aumenta el valor de n, se tendrá un mayor número de rectángulos, y más se aproximará al área de la Región ***R*** (S_n).
- Se concluye que el área viene dada por la fórmula:
  - $$\boxed{A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x}$$
- Análogamente, se puede calcular el área con los rectángulos circunscritos, en lugar de los rectángulos inscritos, pero para ello se tomarían los valores máximos absolutos de *f* en cada subintervalo, en lugar de los valores mínimos.
  - $$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(d_i)\Delta x$$
- Ejemplo:
  - Calcule el área de la región acotada por la curva $y = x^2$, el eje x y la recta x = 3, tomando los rectángulos inscritos.

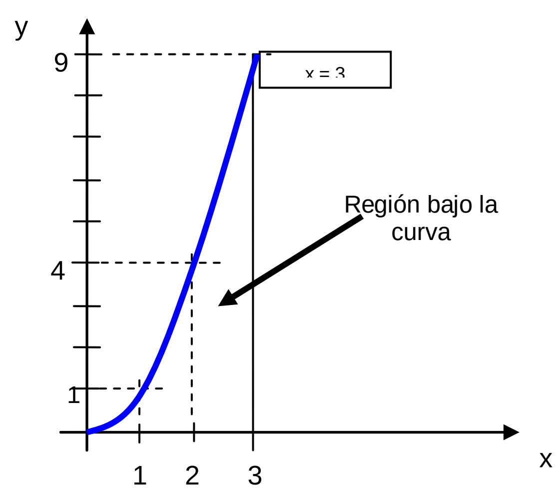
  Intervalo → [0,3]

  $f(x) = x^2$

  Se determinan n sub-intervalos, cada uno de longitud Δx→

  $x_0 = 0$; $x_1 = \Delta x$; $x_2 = 2 \cdot \Delta x$; …; $x_i = i \cdot \Delta x$; $x_{n-1} = (n-1)$ Δx_1; $x_n = 3$.

  $$\Delta x = \frac{3-0}{n} = \Delta x = \frac{3}{n}$$



x	y
0	0
1	1
2	4
3	9

Vemos que f(x) es creciente en [0,3], y el valor mínimo absoluto de f en el i-ésimo sub-intervalo [x_{i-1} , x_i] es $f(x_{i-1})$.

Como $A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$, y como x_{i-1} = (i – 1) Δx, y

f(x) = x^2, entonces: $f(x_{i-1}) = [(i - 1) \Delta x]^2$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \sum_{i=1}^{n}(i-1)^2\Delta x^3 = \sum_{i=1}^{n}(i-1)^2\frac{3^3}{n^3} = \frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 =$$

$$\frac{27}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{9}{2}\right)\left(\frac{2n^2-3n+1}{n^2}\right) = \left(\frac{9}{2}\right)\lim_{n\to+\infty}\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$A = \left(\frac{9}{2}\right)(2-0+0) \therefore A = 9$$

- Ejercicios:
  - Calcule el área del trapecio acotado por la recta 2 x + y = 8, el eje x y las rectas x = 1 y x = 3, tomando los rectángulos inscritos.
  - Calcule el área de la región en el ejemplo [f(x) = x^2], tomando los rectángulos circunscritos.

9.3 Suma de Riemann

- Si se recuerda, la medida del área de una región se definió como:
  - $A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$

- En esa oportunidad, el intervalo [a , b] se dividió en n sub-intervalos de igual longitud (Δx), se tomó $f(x) \geq 0$ y que $f(x)$ fuese continua en [a , b].
- Para definir la integral definida (valga la redundancia), los sub-intervalos serán de longitud variable, y $f(x)$ puede tomar cualquier valor (positivo o negativo).
- Sean los puntos: $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$, y sean las longitudes: $\Delta_1 x = x_1 - x_0$; $\Delta_2 x = x_2 - x_1$; …; $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$; …; $\Delta_n x = x_n - x_{n-1}$, y llamaremos "Norma de la Partición" (Partición de [a , b] será el conjunto de sus sub-intervalos) a la longitud del sub-intervalo más largo de la Partición $\|\Delta\|$.
- Se escoge un punto ε en cada sub-intervalo de la Partición A, tal que en [x_0 , x_1] tenga un $x_0 \leq \varepsilon_1 \leq x_1$, en [x_1 , x_2] tenga un $x_1 \leq \varepsilon_2 \leq x_2$, y así sucesivamente, obteniendo la suma: $f(\varepsilon_1).\ \Delta_1 x + f(\varepsilon_2).\ \Delta_2 x + \ldots + f(\varepsilon_i).\ \Delta_i x + \ldots + f(\varepsilon_n).\ \Delta_n x$, o bien: $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$, que se conoce como la Suma de Riemann.
- Ejemplo:
  - Sea $f(x) = 10 - x^2$, con $x \in$ [¼ , 3]. Halle la Suma de Riemann, tomando los puntos:

	0	1	2	3	4	5
x	¼	1	1 ½	1 ¾	2 ¼	3
ε	-	½	1 ¼	1 ¾	2	2 ¾

Norma $\|\Delta\| = ¾$

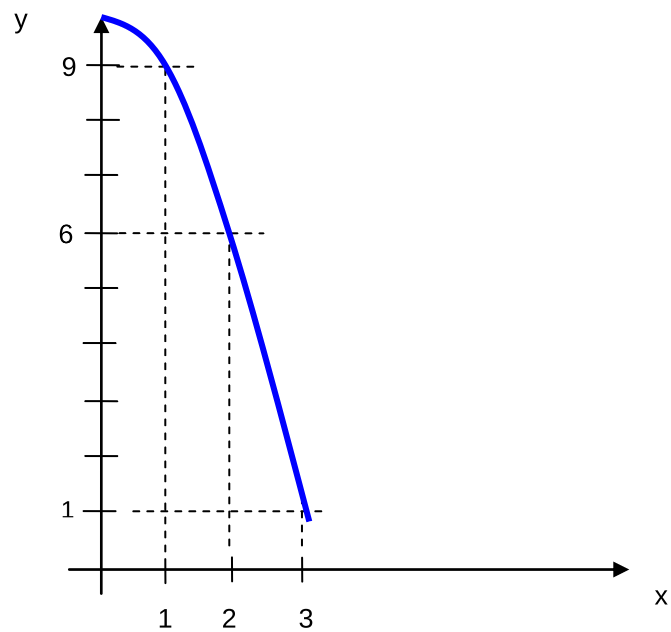
$\sum_{i=1}^{5} f(\xi_i)\Delta_i x = f(\xi_1).\ \Delta_1 x + f(\xi_2).\ \Delta_2 x + f(\xi_3).\ \Delta_3 x + f(\xi_4).\ \Delta_4 x + f(\xi_5).\ \Delta_5 x$

$\sum_{i=1}^{5} f(\xi_i)\Delta_i x =$ f(½)(1-¼) + f(5/4)(1½ -1) + f(7/4)(1¾-1½) + f(2)(2¼-1¾) + f(11/4)(3-2¼)

$$\sum_{i=1}^{5} f(\xi_i)\Delta_i x = (\frac{39}{4})(\frac{3}{4}) + (\frac{135}{16})(\frac{1}{2}) + (\frac{111}{16})(\frac{1}{4}) + 6.(\frac{1}{2}) + (\frac{39}{16})(\frac{3}{4}) =$$

$$\sum_{i=1}^{5} f(\xi_i)\Delta_i x = \frac{117}{16} + \frac{135}{32} + \frac{111}{64} + 3 + \frac{117}{64} \Rightarrow \frac{468+270+111+192+117}{64}$$

$$\sum_{i=1}^{5} f(\xi_i)\Delta_i x = \frac{1158}{64} = \frac{579}{32} \approx 18,0938$$



x	y
¼	9,94
1	9
2	6
3	1

- Por lo tanto, la interpretación geométrica de la Suma de Reimann sería la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos que se hallen sobre el eje x, más los negativos de las medidas de las áreas de los rectángulos que están bajo el eje x.

9.4 Integral Definida

- Si f es una ecuación definida en [a , b], entonces la Integral Definida de f de *a* a *b* está dada por:
  - $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta_i x$ (si el límite ∃)
- La afirmación "la función f es integrable en [a , b]" es sinónima de "la Integral Definida de f de *a* a *b* ∃".
- En la notación de Integral dada, f(x) es el integrando, a es el límite inferior y b es el límite superior. El ∫ es el símbolo de Integración.
- La Antiderivada se conoce también como "Integral Indefinida".
- Teorema: Si una función f es continua en [a , b], entonces f es integrable en [a , b].

  (Sin embargo, aunque suene paradójico, es posible que la Integral exista, aún cuando la función sea discontinua en algunos puntos en [a , b]).
- Si volvemos a tomar nuevamente a los sub-intervalos establecidos como de igual longitud (Δx) (partición regular), y cada $\Delta_i x = \Delta x$, y la Norma es Δx, obtenemos: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta_i x$
- Sea la función f continua en [a , b] y f(x) ≥ 0 ∀ x∈ [a , b], y sea R la región acotada por la curva y= f(x), el eje x y las rectas x=a y x=b. Entonces la medida del área de la región R está dada por:

  $$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta_i x = \int_a^b f(x)dx$$

  - Ello establece que si f(x) ≥ 0 ∀ x∈ [a , b], la Integral Definida $\int_a^b f(x)dx$ se puede interpretar geométricamente como la medida del área de la región R.

- Ejemplo:
  - Calcule el valor exacto de la Integral Definida: $\int_1^3 x^2 dx$

    x$\in$ [1 , 3]; Δx = $\frac{2}{n}$

    Tomamos los puntos extremos derechos de cada sub-intervalo:

    $$\varepsilon_1 = 1 + \frac{2}{n}; \varepsilon_2 = 1 + 2(\frac{2}{n}); \varepsilon_3 = 1 + 3(\frac{2}{n});...; \varepsilon_i = 1 + i(\frac{2}{n});...; \varepsilon_n = 1 + n(\frac{2}{n})$$

    Como f(x) = x^2 → $f(\varepsilon_i) = (1 + \frac{2i}{n})^2 \Rightarrow f(\varepsilon_i) = (\frac{n+2i}{n})^2$

    Entonces,

    $$\int_1^3 x^2 dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n (\frac{n+2i}{n})^2 (\frac{2}{n}) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^3} \sum_{i=1}^n (n^2 + 4ni + 4i^2) \Rightarrow$$

    $$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^3} (n^2 \sum_{i=1}^n 1 + 4n \sum_{i=1}^n i + 4 \sum_{i=1}^n i^2)$$

    $$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^3} [n^2 n + 4n.\frac{n(n+1)}{2} + \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}]$$

    $$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^3} [n^3 + 2n^3 + 2n^2 + \frac{2n(2n^2+3n+1)}{3}]$$

    $$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^3} [6 + \frac{4}{n} + \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}] = 6 + 0 + \frac{8}{3} + 0 + 0 = 6 + \frac{8}{3} = \frac{18+8}{3} \Rightarrow A = \frac{26}{3}$$

- Ejercicios:
  - Halle la suma de Reimann para las siguientes funciones:
    - f(x) = x^2 , x$\in$ [0 , 3]
      - x_0=0; x_1= ½ ; x_2= 1 ¼ ; x_3= 2 ¼ ; x_4=3
      - ε_1= ¼ ; ε_2= 1 ; ε_3= 1 ½ ; ε_4= 2 ½
    - f(x) = $\frac{1}{x}$, x$\in$ [1 , 3]
      - x_0=1; x_1= 1 $\frac{2}{3}$; x_2= 2 ¼ ; x_3= 2 $\frac{2}{3}$; x_4=3

        - ε_1= 1 ¼ ; ε_2= 2 ; ε_3= 2 ½ ; ε_4= 2 ¾
    - $f(x) = x^2 - x + 1$, $x \in [\,0 , 1\,]$
        - x_0=0; x_1= 0,2 ; x_2= 0,5; x_3= 0,7; x_4=1
        - ε_1= 0,1 ; ε_2= 0,4 ; ε_3= 0,6 ; ε_4= 0,9
- Halle el valor de la Integral Definida:
    - $\int_0^2 x^2 dx$
    - $\int_1^2 x^3 dx$
    - $\int_{-2}^2 (x^3 + 1) dx$

9.5 Propiedades de la Integral Definida:

- Si a > b, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- Si f(a) ∃, $\int_a^a f(x)dx = 0$
- Si Δ es cualquier partición en [a, b], entonces $\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum \Delta_i x = b - a$
- Si f está definida en [a , b] y si $\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta_i x$ ∃, donde Δ es cualquier partición de [a , b], y si entonces k es cualquier constante, $\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k.f(\varepsilon_i)\Delta_i x = k.\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta_i x$
- Si k es cualquier constante , entonces $\int_a^b k dx = k(b-a)$

- Si f es integrable en [a , b] y k es cualquier constante, entonces $\int_a^b k f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

- Si f y g son funciones integrables en [a , b], entonces f + g es integrable en [a , b], y entonces: $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

- Si f es integrable en [a , b]; [a , c] y [c , b], donde a < c < b, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

- Si f es integrable en un intervalo cerrado que contiene a a, b y c, entonces (independientemente del orden de a, b y c): $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

- Si las funciones f y g son integrables en [a , b], y si f(x) ≥ g(x) ∀ x ∈[a , b], entonces: $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

- Si f es continua en [a , b], y si m y M son, respectivamente, los valores mínimos y máximos absolutos de f en [a , b], donde m ≤ f(x) ≤ M para ∀ x∈[a , b], entonces: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

- Ejemplo:
  - Halle el valor de $\int_1^3 (3x^2 - 5x + 2)dx$

$$= \int_1^3 3x^2dx - \int_1^3 5xdx + \int_1^3 2dx = 3\int_1^3 x^2dx - 5\int_1^3 xdx + 2(3-1) = 3(\frac{26}{3}) - 5(4) + 4 =$$

= 26 – 20 + 4 = 10

9.6 Teorema del Valor Medio para Integrales

- Si la función *ƒ* es continua en [a , b], entonces existe un número x∈[a , b] tal que, $\int_a^b f(x)dx = f(x)(b-a)$, a ≤ x ≤ b
- El valor de x no es necesariamente único. El Teorema no da un método para encontrar x, pero establece la existencia de un valor de x, y ello se emplea para demostrar otros Teoremas.
- Si la función *ƒ* es integrable en [a , b], el valor promedio (o valor medio) de *ƒ* en [a , b] es: $VP\left(\bar{\bar{x}}\right) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$
- Ejemplo:
    - Sea *ƒ*(x) = x^2, encontrar el valor promedio (VP) de *ƒ* en [1 , 3].

      $$\int_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3}$$

      $$VP = \frac{\frac{26}{3}}{3-1} \Rightarrow VP = \frac{13}{3}$$
- Una aplicación importante de este Teorema se da en Física e Ingeniería, en relación al concepto de Centro de Masa. En economía se utiliza para encontrar un costo promedio total o ingreso promedio total.
- Ejercicios:
    - Encuentre el valor de x que satisfaga el Teorema del Valor Medio para las Integrales:
        - $\int_0^2 x^2 dx$
        - $\int_1^2 x^3 dx$

- $\int_{1}^{4}(x^2+4x+5)dx$

9.7 Teorema Fundamental del Cálculo

- Sea la función f continua en [a , b] y sea x cualquier número en [a , b]. Si F es la función definida por $F(x)=\int_{a}^{x} f(t)dt$, entonces, F'(x) = f(x).
- Si x=a, la derivada de F'(x) puede ser una derivada por la derecha, y si x=b puede ser derivada por la izquierda.
- Sea la función f continua en [a , b] y sea g una función tal que g'(x) = f(x) $\forall$ x $\in$[a , b]. Entonces: $\int_{a}^{b} f(t)dt = g(b)-g(a)$
- Si x=a, la derivada de g'(x) puede ser una derivada por la derecha, y si x=b la derivada de g'(x) puede ser una derivada por la izquierda.
- Ejemplo:
  - Evaluar $\int_{1}^{3} x^2 dx$

    f(x) = x^2. La antiderivada de x^2 es $\frac{1}{3}$ x^3.

    g(x) = $\frac{1}{3}$ x^3

    $$\int_{1}^{3} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{1}^{3} = 9-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}$$

- El proceso de "evaluar" una Integral Indefinida o Definida se llama "integración".
- La **Integral Indefinida** es una función g tal que su derivada g'(x) = f(x).

- La **Integral Definida** $\int_a^b f(x)dx$ es un número cuyo valor depende de la función f y de los números a y b, y se define como el límite de una Suma de Riemann.
- La diferencia entre ambas Integrales, es que la Integral Indefinida general incluye una constante arbitraria "C".
- Por ejemplo: $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$. Esa constante "C" se llama "Constante de Integración".
- Ejemplo:
  - Evaluar:
    - $\int_{1/2}^{4} (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)dx$

$$\int_{1/2}^{4} (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)dx = \int_{1/2}^{4} x^3 dx - \int_{1/2}^{4} 6x^2 dx + \int_{1/2}^{4} 9x dx + \int_{1/2}^{4} 1 dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3} + 9\frac{x^2}{2} + x \Big|_{1/2}^{4} = (64 - 128 + 72 + 4) - (\frac{1}{64} - \frac{1}{4} + \frac{9}{8} + \frac{1}{2}) =$$

$$= \frac{679}{64}$$

- Ejercicios
  - $\int_{-1}^{1} (x^{4/3} + 4x^{1/3})dx$
  - $\int_{0}^{2} (2x^2\sqrt{x^3 + 1})dx$

9.8 Ejercicios de la Unidad

9.8.1 Antiderivadas o Primitivas.

(01) $\int \frac{1}{x^3}dx$

(02) $\int \sqrt{x}dx$

(03) $\int 3xdx$

(04) $\int (x^2+2)dx$

(05) $\int \frac{2}{\sqrt{x}}dx$

(06) $\int \frac{x^3+3}{x^2}dx$

9.8.2 Sumatoria de Reimann.

(01) f(x) = x^3 x∈ [-1,2]
x_0= -1; x_1= -1/3; x_2= ½ ; x_3= 1; x_4= 1 ¼; x_5= 2 . ε_1= - ½ ; ε_2= 0; ε_3= 2/3; ε_4= 1; ε_5= 1 ½

(02) f(x) = x^2 x∈ [0,3]
x_0= 0; x_1= ¾ ; x_2= 1 ¼ ; x_3= 2; x_4= 2 ¾; x_5= 3. ε_1= ½ ; ε_2= 1; ε_3= 1 ¾ ; ε_4= 2 ¼ ; ε_5= 2 ¾

(03) f(x) = $\frac{1}{x+2}$ x∈ [-1,3]
x_0= -1; x_1= - ¼ ; x_2= 0; x_3= ½ ; x_4= 1 ¼ ; x_5= 2; x_6= 2 ¼ ; x_7= 2 ¾ ; x_8= 3. ε_1= - ¾ ; ε_2= 0; ε_3= ¼ ; ε_4= 1; ε_5= 1 ½ ; ε_6= 2; ε_7= 2 ½ ; ε_8= 3

(04) f(x) = $|x|+2$ x∈ [-3,3]
x_0= -3; x_1= -1; x_2= 0; x_3= 2; x_4= 3
ε_1= -2,5 ; ε_2= -0,5; ε_3= 1; ε_4= 2,5

9.8.3 Teorema Fundamental del Cálculo.

(01) $\int_1^2 (x^2-3)dx$

(02) $\int_1^4 3\sqrt{x}dx$

(03) $\int_0^2 (2x^2-3x+2)dx$

(04) $\int_{-1}^0 (x-2)dx$

(05) $\int_{-1}^1 (x^2-2)dx$

(06) $\int_0^1 (2t-1)^2 dt$

9.8.4 Teorema del Valor Medio para Integrales.

(01) f(x) = $3x^2-2x$; x∈ [1,4]

(02) f(x) = $4-x^2$; x∈ [-2,2]

(03) f(x) = $\frac{1}{\sqrt{x}}$; x∈ [4,9]

(04) f(x) = x^2; x∈ [1,3]

(05) f(x) = x^3; x∈ [1,2]

(06) f(x) = x^2+4x+5; x∈ [1,4]

10 Bibliografía

- LARSON, HOSTETLER & EDWARDS: "Cálculo". Ed McGraw Hill. México.
- LEITHOLD, Louis: "El Cálculo con Geometría Analítica". Ed Harla. México.

Otras publicaciones para complementar:

- BRADLEY & SMITH: "Cálculo de una Variable". Ed Prentice Hall. México.
- EDWARDS & PENNEY: "Cálculo con Geometría Analítica". Editorial Prentice Hall.
- PITA R, Claudio: "Cálculo de una Variable". Editorial Prentice Hall.
- STEWART, James: "Cálculo Diferencial e Integral". Editorial Thomson.

Webgrafía:

- Disfruta las Matemáticas
  - http://www.disfrutalasmatematicas.com/index.html
- Graficar Funciones:
  - http://www.fooplot.com/
- Red Escolar Nacional
  - http://www.rena.edu.ve

11 Anexos

11.1 Algunas Fórmulas de Integrales

$$\int du = u + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int u^n du = \begin{cases} \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C, \text{ si } n \neq -1 \\ \ln|u| + C, \text{ si } n = -1 \end{cases}$$

$$\int \ln u\,du = u\ln u - u + C$$

$$\int e^u du = e^u + C$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln .a} + C \; ; \forall\, a \neq 1 \wedge a > 0$$

$$\int sen.u\,du = -\cos u + C$$

$$\int sen^2 u\,du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}sen\;\; 2u + C$$

$$\int \cos u\,du = sen.u + C$$

$$\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}sen\;\; 2u + C$$

$$\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$$

$$\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$$

$$\int \cot u\,du = \ln|sen u| + C$$

$$\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$$

$$\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$$

$$\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$$

$$\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$$

$$\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = sen^{-1}u + C$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1}u + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \sec^{-1}|u| + C$$

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C \; ; \forall\, a \neq 0$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = sen^{-1}\frac{u}{a} + C \; ; \forall\, a > 0$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C \; ; \forall\, a > 0$$

$$\int senh.u\,du = \cosh u + C$$

$$\int \cosh u\,du = senh.u + C$$

$$\int \sec h^2.u\,du = \tanh u + C$$

$$\int \csc h^2.u\,du = -\coth u + C$$

$$\int \sec h.u.\tanh u\,du = -\sec hu + C$$

$$\int c\sec h.u.\coth u\,du = -\csc hu + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = senh^{-1}u + C = \ln(u + \sqrt{u^2+1}) + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \cosh^{-1}u + C = \ln(u + \sqrt{u^2-1}) + C$$

$$\int \frac{du}{1-u^2} = \begin{cases} \tanh^{-1} u + C; \text{ si } |u| < 1 \\ \coth^{-1} u + C; \text{ si } |u| > 1 \\ \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+u}{1-u}\right| + C \; ; \text{ si } u \neq 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = senh^{-1}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{u}{a} + C \; ; \forall\, a > 0$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} \begin{cases} \dfrac{1}{a}\tanh^{-1}\left|\dfrac{u}{a}\right| + C \; ; \forall\, |u| < a \\ \dfrac{1}{a}\coth^{-1}\left|\dfrac{u}{a}\right| + C \; ; \forall\, |u| > a \\ \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+u}{a-u}\right| + C \; ; \forall\, u \neq a;\; a \neq 0 \end{cases}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$\sqrt{a^2-u^2}$ → **u = a sen θ**

$\sqrt{a^2+u^2}$ → **u = a tan θ**

$\sqrt{u^2-a^2}$ → **u = a sec θ**

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \ldots + \frac{An}{a_nx+b_n}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(a_ix+b_i)^p} + \frac{A_2}{(a_ix+b_i)^{p-1}} + \ldots + \frac{A_p}{(a_ix+b_i)}$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$$
$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C$$
z = tan ½ x

$$dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$
$$\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$
$$senx = \frac{2z}{1+z^2}$$

Algunas Fórmulas de Derivadas

$f(x) = c$; $f'(x) = 0$
$f(x)= x^n$; $f'(x) = n.x^{n-1}$
$g(x) = c.\ f(x)$; $g'(x) = c.\ f'(x)$
$h(x) = f(x) + g(x)$; $h'(x) = f'(x)+ g'(x)$
$h(x)=f(x).g(x)$; $h'(x)=f(x).g'(x)+f'(x).g(x)$
$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \forall g(x) \neq 0; h'(x) = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$f(x) = x^{-n} \wedge x\neq 0 \wedge -n$ es entero negativo;
$f'(x) = - n.x^{-n-1}$
$$f(x) = x^{\frac{p}{q}}; f'(x) = \frac{p.x^{p-1}}{q(\sqrt[q]{x^p})^{q-1}}$$
$$f(x) = \frac{1}{f(x)}; f'(x) = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$$
$$f(x) = \text{Ln } x; f'(x) = \frac{1}{x}$$
$f(x)= [g(x)]^n$; $f'(x) = n.[g(x)]^{n-1}.g'(x)$
$f(x)= e^x$; $f'(x) = e^x$
$f(x)$ = sen x; $f'(x)$ = cos x
$f(x)$ = cos x; $f'(x)$ = - sen x
$f(x)$ = csec x; $f'(x)$ = - ctan x . csec x
$f(x)$ = sec x; $f'(x)$ = tan x . sec x
$f(x)$ = tan x; $f'(x) = \sec^2 x$
$f(x)$ = ctan x; $f'(x)$ = - csec^2 x
$$(\text{sen}^{-1} u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$$
$$(\cos^{-1} u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$$
$$(\tan^{-1} u)' = \frac{1}{1+u^2} D_x u$$
$$(\cot^{-1} u)' = -\frac{1}{1+u^2} D_x u$$
$$(\sec^{-1} u)' = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} D_x u$$
$$(\csc^{-1} u)' = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} D_x u$$
(senh u)' = cosh u $D_x u$
(cosh u)' = senh u $D_x u$
(tanh u)' = sech^2 u $D_x u$
(coth u)' = - csch^2 u $D_x u$
(sech u)' = - sech u . tanh u $D_x u$
(csch u)' = - csch u . coth u $D_x u$
$$(\text{senh}^{-1} u)' = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} D_x u$$
$$(\cosh^{-1} u)' = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} D_x u \quad (u > 1)$$
$$(\tanh^{-1} u)' = \frac{1}{1-u^2} D_x u \quad (|u| < 1)$$
$$(\coth^{-1} u)' = \frac{1}{1-u^2} D_x u \quad (|u| > 1)$$
$$(\text{sech}^{-1} u)' = \frac{1}{u\sqrt{1-u^2}} D_x u \quad [u \in (0,1)]$$
$$(\text{csch}^{-1} u)' = \frac{1}{|u|\sqrt{1+u^2}} D_x u \quad (u \neq 0)$$

(Identidades Trigonométricas)

$\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$
$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$
sen x. csc x = 1
cos x . sec x = 1
tan x . cot x = 1
sen 2x = 2 sen x. cos x
cos 2 x = 2 $\cos^2$x – 1
cos 2 x = 1 - 2 sen^2x
cos 2 x = $\cos^2$x – sen^2x
$\cos^2$ 2x = ½ (1 + cos 4x)

(Identidades Trigonométricas Hiperbólicas)

$\cosh^2 x - \text{senh}^2 x = 1$
$1 - \tanh^2 x = \text{sech}^2 x$
$1 - \coth^2 x = -\text{csch}^2 x$
senh 2x = 2 senh x . cosh x
cosh 2x = $\cosh^2$ x + senh^2 x
cosh 2x = 2 senh^2 x + 1
cosh 2x = 2 $\cosh^2$ x – 1

11.2 Matemáticos Ilustres

Julius Wilhelm Richard Dedekind

(6 de octubre de 1831 - 12 de febrero de 1916)

Matemático alemán.

Los cortes de Dedekind son unos conjuntos de números racionales que representan la primera construcción formal del conjunto de los números reales.

Sus cortes zanjan definitivamente el problema de la fundamentación del análisis al definir el conjunto de los números reales a partir de los racionales. En su magistral artículo de 1872, Dedekind caracterizó los números reales como un cuerpo ordenado y completo, y ofreció un desarrollo de toda la cuestión que es un modelo de organización y claridad.

Su trabajo sobre los números naturales fue también fundamental, sentando bases para la teoría de conjuntos.

http://es.wikipedia.org/wiki/Julius_Wilhelm_Richard_Dedekind

René Descartes

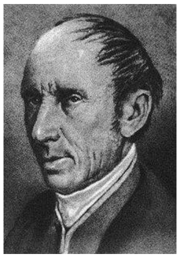
(La Haye, Turena francesa, 31 de marzo de 1596 - Estocolmo, Suecia, 11 de febrero de 1650),

Filósofo, matemático y físico francés, considerado como el padre de la geometría analítica y de la filosofía moderna, así como uno de los nombres más destacados de la revolución científica.

Formuló el célebre principio cogito ergo sum ("pienso, luego existo"), elemento esencial del racionalismo occidental. Escribió una parte de sus obras en latín, que era la lengua internacional del conocimiento y la otra en francés. En física está considerado como el creador del mecanicismo, y en matemática, de la geometría analítica. Se lo asocia con los ejes cartesianos en geometría, con la iatromecánica y la fisiología mecanicista en medicina, con el principio de inercia en física, con el dualismo filosófico mente/cuerpo y el dualismo metafísico materia/espíritu. No obstante parte de sus teorías han sido rebatidas -teoría del animal-máquina- o incluso abandonadas -teoría de los vórtices-. Su pensamiento pudo aproximarse a la pintura de Poussin por su estilo claro y ordenado.

http://es.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes

Augustin Louis Cauchy



(París, 21 de agosto de 1789- Sceaux, 23 de mayo de 1857)

Matemático francés.

Cauchy fue pionero en el análisis matemático y la teoría de grupos de permutaciones, contribuyendo de manera medular a su desarrollo. También investigó la convergencia y la divergencia de las series infinitas, ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidad y física matemática.

En 1814 publicó la memoria de la integral definida que llegó a ser la base de la teoría de las funciones complejas. Gracias a Cauchy, el análisis infinitesimal adquiere bases sólidas.

Cauchy precisa los conceptos de función, de límite y de continuidad en la forma actual o casi actual, tomando el concepto de límite como punto de partida del análisis y eliminando de la idea de función toda referencia a una expresión formal, algebraica o no, para fundarla sobre la noción de correspondencia. Los conceptos aritméticos otorgan ahora rigor a los fundamentos del análisis, hasta entonces apoyados en una intuición geométrica que quedará eliminada, en especial cuando más tarde sufre un rudo golpe al demostrarse que hay funciones continuas sin derivadas, es decir: curvas sin tangente.

http://es.wikipedia.org/wiki/Augustin_Louis_Cauchy

Michel Rolle

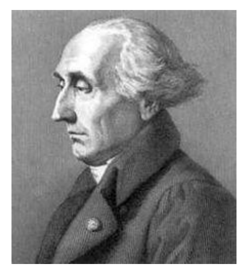
(21 de abril de 1652 - 8 de noviembre de 1719)

Matemático francés.

Se dedicó preferentemente a la teoría de ecuaciones, dominio en el que encontró diversos resultados, entre los que destaca el reconocido teorema que lleva su nombre formulado en 1691. En el cual representa una aplicación de la teoría de funciones a la de ecuaciones algebraicas. También inventó la notación sqrt[n]{x} para designar la enésima raíz de x. Rolle nació en Ambert, Basse-Auvergne y murió en París.

http://es.wikipedia.org/wiki/Michel_Rolle

Joseph-Louis Lagrange



(25 de enero de 1736 en Turín - 10 de abril de 1813 en París)

Matemático, físico y astrónomo italiano

Lagrange trabajó para Federico II de Prusia, en Berlín, durante veinte años. Lagrange demostró el teorema del valor medio, desarrolló la mecánica Lagrangiana y tuvo una importante contribución en astronomía.

http://es.wikipedia.org/wiki/Joseph-Louis_de_Lagrange

Guillaume François Antoine, Marqués de l'Hôpital

(París, 1661 – París, 2 de febrero de 1704)

Matemático francés.

El logro más conocido atribuído a su nombre es el descubrimiento de la regla de L'Hôpital, que se emplea para calcular el valor límite de una fracción donde numerador y denominador tienden a cero o ambos tienden a infinito.

L'Hôpital nació en París, Francia. Inicialmente planeó una carrera militar, pero su pobre visión le obligó a cambiar a las matemáticas. Resolvió el problema de la braquistócrona, independientemente de otros matemáticos contemporáneos, como Isaac Newton. Murió en París.

Es también el autor del primer libro de texto conocido sobre cálculo diferencial, L'Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes (Análisis de los infinitamente pequeños para el entendimiento de las líneas curvas). Publicado en 1696, el texto incluye las clases de su profesor, Johann Bernoulli, en donde Bernoulli discute la indeterminación 0/0. Este es el método para resolver estas indeterminaciones a través de derivadas sucesivas que lleva su nombre.

En 1694 Bernoulli y l'Hôpital acordaron que l'Hôpital le pagaría trescientos francos anuales para que le transmitiera sus descubrimientos, que l'Hôpital describiría en su libro. En 1704, tras la muerte de l'Hôpital, Bernoulli reveló la existencia del trato, asegurando que la mayoría de los descubrimientos que aparecían en el libro de l'Hôpital's eran suyos. En 1922 se encontraron documentos que apoyaban la tesis de Bernoulli. La creencia generalizada de que l'Hôpital trató de aprovecharse del descubrimiento de la regla que lleva su nombre ha resultado falsa. Publicó su libro anónimamente, agradeciendo la ayuda prestada por Bernoulli en la introducción, y nunca dijo ser el descubridor de la regla.

http://es.wikipedia.org/wiki/Guillaume_de_l%27H%C3%B4pital

Brook Taylor

(Edmonton, Middlesex, Inglaterra, 18 de agosto de 1685 - Somerset House, Londres, 29 de diciembre de 1731)

Matemático británico.

En su Methodus Incrementorum Directa et Inversa (Londres, 1715) desarrolló una nueva parte dentro de la investigación matemática, que hoy se llama cálculo de las diferencias finitas. Entre las distintas aplicaciones, se usó para determinar la forma del movimiento de una cuerda vibrante, reducido por él por vez primera con éxito a principios mecánicos. El mismo trabajo contenía la famosa fórmula conocida como Teorema de Taylor, cuya importancia sólo se reconoció en 1772, cuando Lagrange se dio cuenta de su valor y lo definió como "el diferencial principal del fundamento del cálculo".

http://es.wikipedia.org/wiki/Brook_Taylor

Georg Friedrich Bernhard Riemann

(Breselenz, Alemania, 17 de septiembre de 1826 - Verbania, Italia, 20 de julio de 1866)

Matemático alemán.

Realizó contribuciones muy importantes al análisis y la geometría diferencial, algunas de las cuales allanaron el camino para el desarrollo más avanzado de la relatividad general. Su nombre está conectado con la función zeta, la hipótesis de Riemann, la integral de Riemann, el lema de Riemann, las variedades de Riemann, las superficies de Riemann y la geometría de Riemann.

http://es.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann

11.3 Ejercicios propuestos y resueltos

1. Resuelva las siguientes sumas algebraicas:

   a. $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{7}$

   $\frac{63+56-12}{84}=\mathbf{\frac{107}{84}}$

   b. $\frac{2}{5}-\frac{3}{4}+\frac{5}{8}$

   $\frac{64-120+100}{160}=\frac{44}{160}=\mathbf{\frac{11}{40}}$

2. Expanda las siguientes expresiones:

   a. $(x+3)^2$

   $(x+3)^2 = \mathbf{x^2 + 6x + 9}$

   b. $(3-x)(3+x)$

   $(3-x)(3+x) = \mathbf{9 - x^2}$

   c. $(3x-4)^2$

   $(3x-4)^2 = \mathbf{9x^2 - 24x + 16}$

3. Factorice los siguientes polinomios:

   a. $x^2 - 9x + 20 = 0$

$$x=\frac{9\pm\sqrt{9^2-4.1.20}}{2.1}\Rightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{81-80}}{2}\Rightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{1}}{2}\Rightarrow x=\frac{9\pm1}{2}$$

$$x_1=\frac{9+1}{2}\Rightarrow x_1=\frac{10}{2}\Rightarrow x_1=5 \qquad x_2=\frac{9-1}{2}\Rightarrow x_2=\frac{8}{2}\Rightarrow x_2=4$$

   b. $x^2 + 5x - 14 = 0$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4.1.(-14)}}{2.1}\Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25+56}}{2}\Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{81}}{2}\Rightarrow x=\frac{-5\pm9}{2}$$

$$x_1=\frac{-5+9}{2}\Rightarrow x_1=\frac{4}{2}\Rightarrow x_1=2 \qquad x_2=\frac{-5-9}{2}\Rightarrow x_2=\frac{-14}{2}\Rightarrow x_2=-7$$

4. Obtenga los valores de x para los cuales el número dado sea real:

   a. $\sqrt{3+2x}$

   $3+2x \geq 0$

   $2x \geq -3$

   $x \geq -\frac{3}{2}$; $\mathbf{x \in [-\frac{3}{2}, +\infty)}$

   b. $\sqrt{\frac{4}{3}x-\frac{5}{2}}$

   $\frac{4}{3}x-\frac{5}{2} \geq 0$

   $\frac{4}{3}x \geq \frac{5}{2}$

   $x \geq \frac{15}{8}$; $\mathbf{x \in [\frac{15}{8}, +\infty)}$

5. Halle los intervalos de x que satisfagan las desigualdades:

   a. $4x + 3 > x - 5$

   $4x - x > -5 - 3$

   $3x > -8$

   $x > -\frac{8}{3}$; $\mathbf{x \in (-\frac{8}{3}, +\infty)}$

   b. $3 > -2 -2x \geq -6$

   $3 + 2 > -2x \geq -6 + 2$

   $5 > -2x \geq -4$

   $\frac{5}{2} > -x \geq -\frac{4}{2}$

   $-\frac{5}{2} < x \leq 2$; $\mathbf{x \in (-\frac{5}{2}, 2]}$

6. Halle los valores de x correspondientes que satisfagan las siguientes ecuaciones:

a. $| 5x + 4 | = 6$

$5x + 4 = 6$

$5x = 6 - 4$

$5x = 2$

$\mathbf{x = \frac{2}{5}}$

$-5x - 4 = 6$

$-5x = 6 + 4$

$-5x = 10$

$x = -\frac{10}{5}$

$\mathbf{x = -2}$

b. $| 4x - 5 | = 3$

$4x - 5 = 3$

$4x = 5 + 3$

$4x = 8$

$x = \frac{8}{4}$

$\mathbf{x = 2}$

$-4x + 5 = 3$

$-4x = 3 - 5$

$-4x = -2$

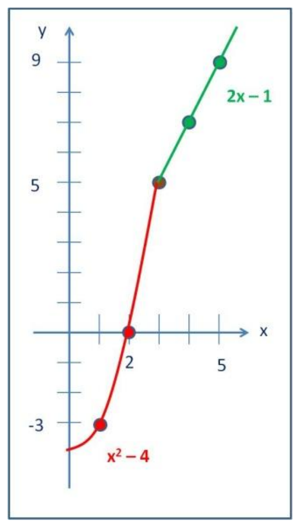
$x = \frac{2}{4} \rightarrow \mathbf{x = \frac{1}{2}}$

---

7. Dada la siguiente función, grafique, halle Dominio y Rango:

$$y = \begin{cases} x^2 - 4; \text{ si } x < 3 \\ 2x - 1; \text{ si } x \geq 3 \end{cases}$$

x	y
1	-3
2	0
3	5
3	5
4	7
5	9



Dominio $\rightarrow x \in R$

Rango $\rightarrow y \in R$

8. Halle la Función Compuesta f[g(x)] y g[f(x)]:

a. $f(x) = x^2 - 2x + 4$; $g(x) = x + 1$

$f[g(x)] = (x+1)^2 - 2(x+1) + 4 \rightarrow x^2 + 2x + 1 - 2x - 2 + 4 \rightarrow \mathbf{x^2 + 3}$

$g[f(x)] = x^2 - 2x + 4 + 1 \rightarrow \mathbf{x^2 - 2x + 5}$

b. $f(x) = x^2 - 1$; $g(x) = \sqrt{x}$

$f[g(x)] = (\sqrt{x})^2 - 1 \rightarrow \mathbf{x - 1}$

$g[f(x)] = \sqrt{\mathbf{x^2 - 1}}$

---

9. Resuelva los siguientes límites:

a. $\lim_{x\to 2}(2x+1)^2$

$\lim_{x\to 2}(2x+1)^2 = (2.2+1)^2 = 5^2 = 25$

b. $\lim_{x\to 4} 3(x-1)$

$\lim_{x\to 4} 3(x-1) = 3(4-1) = 3.3 = 9$

c. $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+2}$

$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+2} = \frac{1-1}{1+2} = \frac{0}{3} = 0$

d. $\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-2}{3-x}$

$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-2}{3-x} = \frac{2.3^2-2}{3-3} = \frac{16}{0} = \infty$

10. Halle Asíntota Vertical y Horizontal de la siguiente función: $3xy^2 - 4y^2 - 2x = 0$

Asíntota Horizontal:

$y^2(3x-4) = 2x \rightarrow y^2 = \frac{2x}{3x-4} \rightarrow y = \sqrt{\frac{2x}{3x-4}}$

$3x - 4 = 0 \rightarrow 3x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{3} \rightarrow$ **AH en** $\mathbf{x = \frac{4}{3}}$

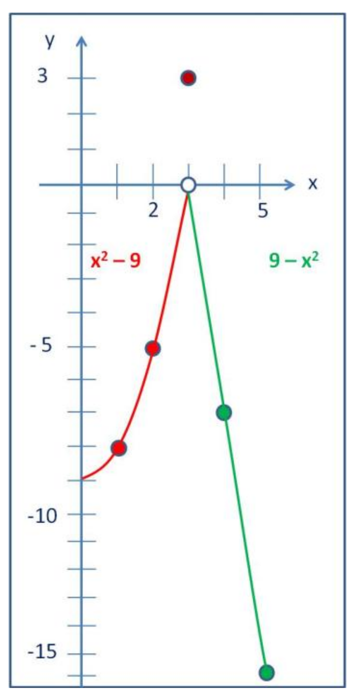
Asíntota Vertical:

$\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{2x}{3x-4}} \rightarrow \lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{\frac{2x}{x}}{\frac{3x}{x}-\frac{4}{x}}} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{3-0}} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} \rightarrow$ **AV en** $\mathbf{y = \sqrt{\frac{2}{3}}}$

11. Evalúe si existe continuidad en x=3 en la siguiente función. Si hay discontinuidad, indicar si la misma es esencial o eliminable. De ser eliminable, ¿cómo se plantearía la solución?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & x < 3 \\ 3 & x = 3 \\ 9 - x^2 & x > 3 \end{cases}$$

x	y
1	-8
2	-5
3	0
3	3
3	0
4	-7
5	-16



$f(3)=3 \quad \exists$

$\lim_{x\to 3} f(x) = 0 \quad \exists$

$\lim_{x\to 3} f(x) \neq f(3)$

$\therefore$ f(x) no es continua en x = 3

La discontinuidad es eliminable, al hacer f(x) = 0 con x = 3.

12. Halle las derivadas de las siguientes funciones:

a. f(x) = 3,1416

f'(x) = 0

b. f(x) = x^4

f'(x) = 4 x^3

c. f(x) = $5x^5$

f'(x) = $25x^4$

d. f(x) = x^2 – sen x

f'(x) = 2x – cos x

e. f(x) = $\frac{1}{x^3}$

f'(x) = $-3x^{-4}$ → f'(x)=$-\frac{3}{x^4}$

f. f(x) = $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 5$

f'(x) = x^2 – x + 3

g. f(x) = x^4.senx

f'(x) = x^4.cos x + $4x^3$.sen x

h. f(x)= $\frac{x^2 - 2}{x+5}$

$$f'(x) = \frac{(x+5)2x - (x^2-2)(1)}{(x+5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+10x+2}{(x+5)^2}$$

13. Aplique Regla de la Cadena:

a. f(x) = $(3x + 2)^5$

f'(x) = $5(3x + 2)^4$. 3 → f'(x) = $15(3x +2)^4$

b. f(x) = $\sqrt[3]{\tan^2 x}$

f(x) = $(\tan x)^{2/3}$

$$f'(x) = \frac{2}{3}\tan^{-1/3} x.\sec^2 x \to f'(x) = \frac{2\sec^2 x}{3\sqrt[3]{\tan x}}$$

14. Halle la 4ta Derivada de la función:

a. f(x) = x^3 – 3x + 2
f'(x) = $3x^2$ – 3
f''(x) = 6x
f'''(x) = 6
$f^{(4)}(x) = 0$

b. f(x) = $4\sqrt{x^3}$ → f(x) = $4\, x^{3/2}$

f'(x) = $6\, x^{1/2}$

f''(x) = $3\, x^{-1/2}$

f'''(x) = $-\frac{3}{2}x^{-3/2}$

$f^{(4)}(x) = \frac{9}{4}x^{-5/2}$

15. Aplique el Teorema de L´Hopital si se reúnen las condiciones:

a. $\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-3x-6}{4-x^2}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-3x-6}{4-x^2} = \frac{3.4-3.2-6}{4-4} = \frac{0}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{6x-3}{-2x} = \frac{6.2-3}{-2.2} = -\frac{9}{4}$$

b. $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x-1} = \frac{2.1+1-3}{1-1} = \frac{0}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x+1}{1} = \frac{4.1+1}{1} = 5$$

16. Verifique que se cumple el Teorema de Rolle en el intervalo x ϵ [-1, -6], para la función f(x) = x^2 + 7x +6. Hallar el valor de c para el cual f'(c) = 0.

f(x) = x^2 + 7x +6

x^2 + 7x +6 = 0

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4.1.6}}{2.1} \to x = \frac{-7 \pm 5}{2}$$

f'(x) = 2x + 7

f'(c)= 2c + 7

2c + 7 = 0

2c = -7

$$x = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-7-5}{2} = -6 \\ x_2 = \dfrac{-7+5}{2} = -1 \end{cases}$$

x_1 = -6 ^ x_2 = -1 son válidos en el intervalo dado

c = -7/2

c = -7/2 es válido en el intervalo dado

17. Verifique que se cumple el Teorema del Valor Medio (o Lagrange) para la función f(x) = x^2 -1 en el intervalo x ϵ [-2, 4]. Encontrar el valor de c correspondiente.

    f(-2) = $(-2)^2$ -1 → f(-2) = 4 – 1 → f(-2) = 3
    f(4) = $(4)^2$ – 1 → f(4) = 16- 1 → f(4) = 15

    $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{15-3}{4-(-2)} = \dfrac{12}{6} = 2$

    f'(x) = 2x ^f'(c)= 2

    2c = 2 → c= 2/2 → **c = 1**

18. Para la función f(x) = $2x^2$ – 8x + 5, halle
    a. Puntos Críticos
    b. Intervalos de Crecimiento y Decrecimiento
    c. Punto de Inflexión
    d. Intervalos de Concavidad
    e. Mínimo y Máximo en el intervalo x ϵ [0, 3]

    f'(x) = 4x – 8 ^ f'(x) = 0 ∴ 4x – 8 = 0 → x = 8/4 → **x = 2 (Punto Crítico)**

    0 2 3

    f'(0) = 4.0 – 8 → f'(0) = -8 (Decreciente)

    f(3) = 4.3 – 8 → f'(3) = 4 (Creciente)

    ∴

    f(x) es decreciente en x ϵ (-∞, 2) ^ f(x) es creciente en x ϵ (2, ∞)

    f''(x) = 4 (Positivo)

    No existe Punto de Inflexión

    f(x) es cóncava hacia arriba en todo el intervalo x ϵ (-∞, ∞)

    Para hallar máximos y mínimos:

    f(0) = 2.0^2 – 8.0 + 5 → f(0) = 5

    f(2) = 2.2^2 – 8.2 + 5 → f(2) = -3

    f(3) = 2.3^2 – 8.3 + 5 → f(3) = -1

    f(x) tiene un mínimo relativo en x=2, y máximo relativo en x= 0.

19. Integre:
    a. $\int (x-2)^2 dx$

    $\int (x^2 - 4x + 4)dx = \int x^2 dx$ - $\int 4x dx + \int 4 dx$ → $\frac{x^3}{3}$- - 4$\frac{x^2}{2}$+ 4x + C = $\mathbf{\frac{x^3}{3}}$ **- 2 x^2 + 4x + C**

    b. $\int \frac{x^2-x}{x} dx$

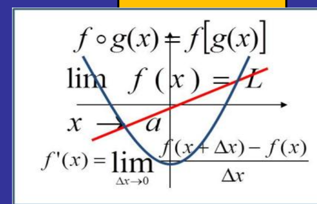
    $\int \frac{x^2}{x} dx$ - $\int \frac{x}{x} dx$ → $\int x dx$ - $\int dx$ → $\mathbf{\frac{x^2}{2}}$ **- x + C**

c. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx$

$\int_{-1}^{1} x^{-2} dx \rightarrow \frac{x^{-1}}{-1} |_{-1}^{1} \rightarrow \rightarrow -\frac{1}{x} |_{-1}^{1} \rightarrow$ -1 -1 $\rightarrow$ **-2**

d. $\int_{1}^{3} 5\sqrt{x}\, dx$

$\int_{1}^{3} 5\, x^{1/2} dx \rightarrow \frac{\frac{5x^{3/2}}{1}}{\frac{3}{2}} |_{1}^{3} \rightarrow \frac{10x^{3/2}}{3} |_{1}^{3} \rightarrow \frac{10\sqrt{3^3}}{3}$ - $\frac{10\sqrt{1^3}}{3} \rightarrow \boldsymbol{\frac{30\sqrt{3}-10}{3}}$



Luis Castellanos

Nacido en Caracas, DC, Venezuela. Es Ingeniero de Sistemas (IUPFAN), Magíster en Ingeniería de Sistemas (USB), Magíster en Tecnología Educativa HC (CIHCE), y Doctor HC (CIHCE).

Ha sido docente en el IUPFAN, Academia Militar de Venezuela, Universidad Rafael Urdaneta y en La Universidad del Zulia. Actualmente es docente en UNEFA Zulia y en la Universidad Dr. José Gregorio Hernández.

Ha escrito los libros de Reflexiones Diarias (I), Reflexiones Diarias (II), Reflexiones Diarias (III) (Editorial Lulu), Seguridad en Informática y Metodología de Desarrollo de Sistemas de Información (Editorial Académica Española).

De igual manera, ha escrito Guías de Matemática I, Matemática II, y Cálculo Numérico.