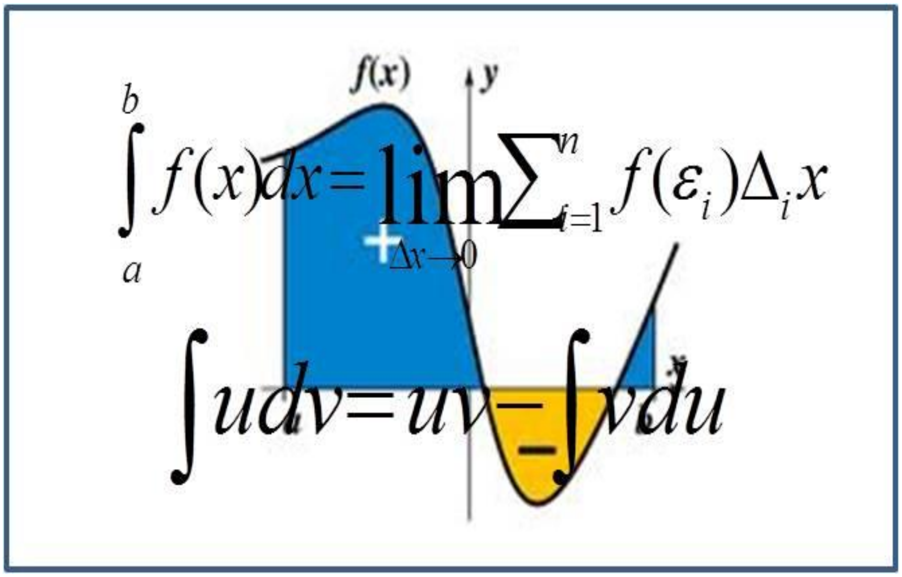
Matemática II



Dr Luis Castellanos

Matemática II

Dr Luis Castellanos

Maracaibo 2006

Versión 1.31 revisada en mayo 2013

Índice

1 Derivadas y Cálculo Diferencial

1.1 Derivadas de Función Compuesta

- Derivadas de Función Compuesta:
  - $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$
  - Regla de la Cadena:
    - $(f \circ g)'(x) = f'[g(x)].g'(x)$
    - $f[g(x)]' = f'[g(x)].g'(x)$
- Ejercicios:
  - $f(x) = \text{sen}(x^2)$; $f'(x) = 2x\cos(x^2)$
  - $f(x) = \text{sen}^2 x \rightarrow f(x) = (\text{sen}\, x)^2$; $f'(x) = 2.\text{sen}.\cos x \rightarrow f'(x) = \text{sen}\, 2x$
  - $f(x) = x^{10} \wedge g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4$; $(f \circ g)'(x) = 10[g(x)]^9.(6x^2 - 10x) \rightarrow (f \circ g)'(x) = 10.(2x^3 - 5x^2 + 4)^9.(6x^2 - 10x)$
  - $f(x) = \text{sen}\, 4x$; $f'(x) = 4.\cos 4x$
  - $f(x) = (\tan x)^{2/3}$; $f'(x) = \frac{2}{3}.\frac{\sec^2 x}{\sqrt[3]{\tan x}}$
  - $f(x) = \cos g(x)$; $f'(x) = -g'(x).\,\text{sen}\, g(x)$
  - $f(x) = \tan g(x)$; $f'(x) = g'(x).\,\sec^2 g(x)$
  - $f(x) = \csc g(x)$; $f'(x) = -g'(x).\,\csc g(x).\text{ctan}\, g(x)$
  - $f(x) = \text{Ln}\,|g(x)|$; $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

1.2 Diferenciación Implícita o Derivadas Parciales

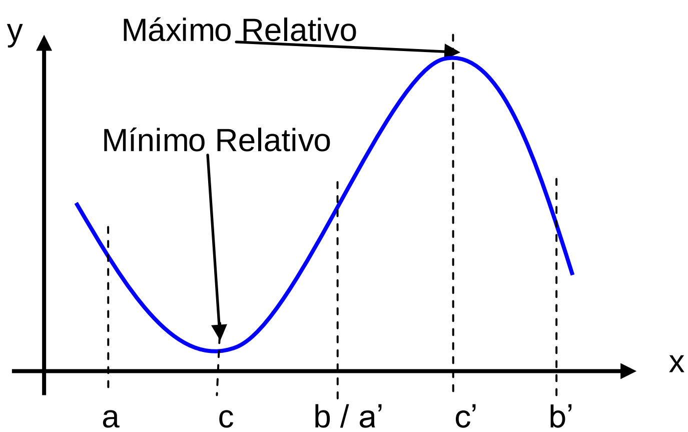
- Si $y = 3x^2 + 5x + 1$, dicha ecuación define explícitamente la Función $f(x)$.
- Pero $x^6 - 2x = 3y^6 + y^5 - y^2$ no puede resolverse explícitamente. Esa ecuación se puede redefinir:
  - $F(x) = x^6 - 2x$
  - $G(x) = 3y^6 + y^5 - y^2$ $[y = f(x)]$
  - Entonces $F(x) = G[f(x)]$
- Suponiendo que la ecuación dada ($x^6 - 2x = 3y^6 + y^5 - y^2$) define a y como una Función diferenciable de x, podemos encontrar la Derivada de y con respecto a x, mediante la Diferenciación o Derivación Implícita.
  - $(x^6 - 2x) = (3y^6 + y^5 - y^2)$

- $6x^5 - 2 = (18y^5 + 5y^4 - 2y)\, D_x y$
- $D_x y = \dfrac{6x^5 - 2}{18y^5 + 5y^4 - 2y}$

- Ejemplos:
  - Sea $3x^4 y^2 - 7xy^3 = 4 - 8y$. Halle $D_x y$.
    - $12x^3 y^2 + 3x^4 (2y.D_x y) - 7y^3 - 7x(3y^2. D_x y) = 0 - 8. D_x y$
    - $D_x y = \dfrac{7y^3 - 12x^3.y^2}{6x^4 y - 21xy^2 + 8}$
  - Sea $(x + y)^2 - (x - y)^2 = x^4 + y^4$. Halle $D_x y$.
    - $2(x+y).(1+ D_x y) - 2(x-y).(1- D_x y) = 4x^3 + 4y^3. D_x y$
    - $D_x y = \dfrac{x^3 - y}{x - y^3}$

1.3 Valor Máximo y Mínimo de $f(x)$

- Una función f tiene un valor máximo relativo en c, si existe un intervalo abierto que contenga a c, en el cual f esté definida, tal que:
  - $f(c) \geq f(x)\ \forall$ x en el Intervalo.
- Una función f tiene un valor mínimo relativo en c, si existe un intervalo abierto que contenga a c, en el cual f esté definida, tal que:
  - $f(c) \leq f(x)\ \forall$ x en el Intervalo.
- Si la función f tiene un valor máximo o mínimo relativo en c, se dice que f tiene un valor extremo relativo en c.



- Si c es un número en el dominio de la función f, y si $f'(c) = 0$ ó $f'(c)$ no existe, entonces c se denomina como Punto Crítico de f.

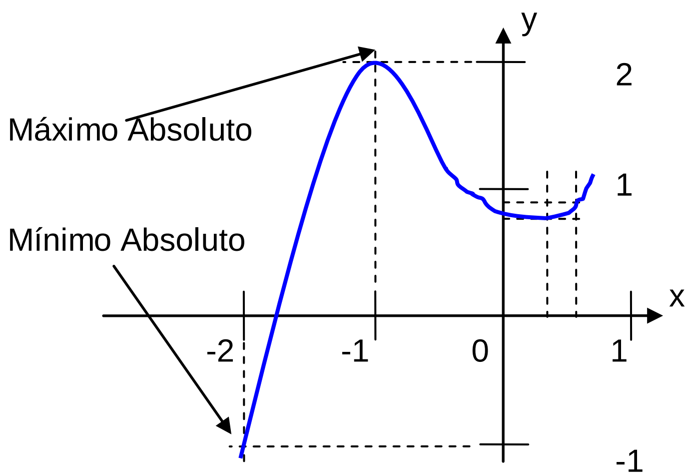
- Una Función f tiene un valor máximo absoluto en un intervalo, si existe algún número c en el intervalo, tal que $f(c) \geq f(x)$ $\forall$ x en dicho intervalo. En ese caso, $f(c)$ es el valor máximo absoluto de f en todo el intervalo.
- Una Función f tiene un valor mínimo absoluto en un intervalo, si existe algún número c en el intervalo, tal que $f(c) \leq f(x)$ $\forall$ x en dicho intervalo. En ese caso, $f(c)$ es el valor mínimo absoluto de f en todo el intervalo.

Una función puede o no tener un extremo absoluto en un intervalo dado.

- Se dice que $f(c)$ es el valor máximo absoluto de la función f, si c está en el dominio de f y si $f(c) \geq f(x)$ $\forall$ x en el dominio de f.
- Se dice que $f(c)$ es el valor mínimo absoluto de la función f, si c está en el dominio de f y si $f(c) \leq f(x)$ $\forall$ x en el dominio de f.
- Para hallar máximos y mínimos, en un intervalo, se hallan los números críticos y se evalúan, al igual que los extremos del intervalo, en $f(x)$. El mayor de los valores de $f(x)$ indica el máximo, así como el menor de los valores indica el mínimo.
- Ejemplo:
  - Sea $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$. Halle los números críticos. Halle los extremos absolutos de $f(x)$ en [-2 , ½]. Grafique $f(x)$.
    - $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$
    - Condición para número crítico: $f'(x) = 0$
    - Entonces:
      - $3x^2 + 2x - 1 = 0$
      - $x_1 = ⅓$; $x_2 = -1$
    - Números Críticos: $x_1 = ⅓$; $x_2 = -1$
    - Extremos absolutos:

x	-2	-1	⅓	½
f(x)	-1	2	22/27	7/8

      - En (-1, 2) hay un máximo absoluto
      - En (-2, -1) hay un mínimo absoluto



- Ejercicios:
  - Halle los números críticos y extremos absolutos de las siguientes funciones:
    - $f(x) = - x^2$ en (-3, 2]
    - $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ en (-1, 1)
    - $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 6x + 7 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en [-5, 4]
    - $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ en [1, 5]

1.4 Funciones Crecientes y Decrecientes

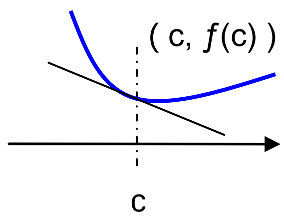
- Una Función f definida en un intervalo es creciente en dicho Intervalo, ssi $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$, donde $x_1 \wedge x_2 \in$ al Intervalo.
- Una Función f definida en un intervalo es decreciente en dicho Intervalo, ssi $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$, donde $x_1 \wedge x_2 \in$ al Intervalo.
- Si una Función es creciente o decreciente en un intervalo, se dice que es monótona en el intervalo.
- Sea f una función continua en el intervalo cerrado [a, b] y diferenciable en el intervalo abierto (a, b):
  - si $f'(x) > 0 \ \forall \ x \in (a, b)$, f es creciente en [a, b]
  - si $f'(x) < 0 \ \forall \ x \in (a, b)$, f es decreciente en [a, b]
- Ejemplo:

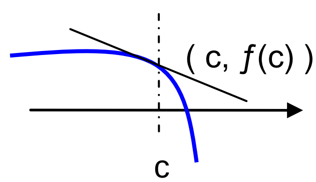
- Determine los intervalos en los cuales f es creciente y decreciente:
  - $f(x) = x^2 - 4x - 1$
  - $f'(x) = 2x - 4$
    - $2x - 4 > 0$ (creciente) → $x > 2$
    - $2x - 4 < 0$ (creciente) → $x < 2$
  - Creciente en $x \in (2, \infty)$ y Decreciente en $x \in (-\infty, 2)$

- Ejercicios:
  - $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$
  - $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2$
  - $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

1.5 Concavidad y Punto de Inflexión

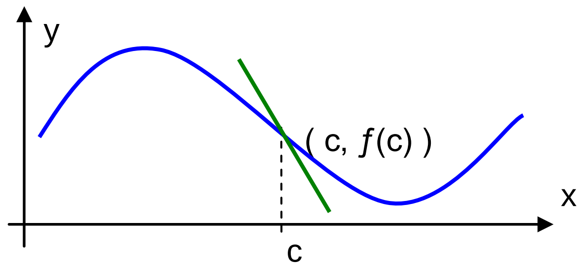
- La gráfica de una Función f es <u>cóncava hacia arriba</u>, en el punto (c, $f(c)$), si existe $f'(c)$ y si existe un intervalo abierto (a, b) que contenga a c, tal que para todos los valores de $x \neq c$ en (a, b), el punto (x, $f(x)$) en la gráfica esté <u>arriba</u> de la recta tangente a la gráfica en (c, $f(c)$).





- La gráfica de una Función f es <u>cóncava hacia abajo</u>, en el punto (c, $f(c)$), si existe $f'(c)$ y si existe un intervalo abierto (a, b) que contenga a c, tal que para todos los valores de $x \neq c$ en (a, b), el punto (x, $f(x)$) en la gráfica esté <u>debajo</u> de la recta tangente a la gráfica en (c, $f(c)$).
- Sea f una Función diferenciable en un intervalo abierto (a, b) que contenga a c. Entonces:
  - Si $f''(c) > 0$, la gráfica de f es cóncava hacia arriba en (c, $f(c)$).
  - Si $f''(c) < 0$, la gráfica de f es cóncava hacia abajo en (c, $f(c)$).
- Un Punto de Inflexión es el punto de una Gráfica donde cambia el sentido de la concavidad, y donde la Gráfica corta a su recta tangente

- El punto (c, f(c)) es un Punto de Inflexión de la gráfica de la Función f, si la gráfica tiene en ese punto una recta tangente y si existe un intervalo abierto (a, b) que contenga a c, tal que si x $\in$ (a, b), entonces:
  - ($f''(x) < 0$ si $x < c$) $\wedge$ ($f''(x) > 0$ si $x > c$) ó
  - ($f''(x) > 0$ si $x < c$) $\wedge$ ($f''(x) < 0$ si $x > c$)



- Ejemplo:
  1. Halle los Puntos de Inflexión de la Gráfica de f(x), y determine dónde la Gráfica es cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo.
     - $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
     - $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - \frac{5}{3}$
     - $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 4x + \frac{8}{3}$
     - $f(x) = x^2 - 5x + 6$

1.6 Resumen de Procedimientos para la Aplicación de Derivadas

- Aplicar Regla de la Cadena
  1. Determinar cuál es la función externa y cuál es la función interna
  2. Derivar la función externa, con la función interna como argumento
  3. Derivar la función interna.
  4. Resolver el producto.
- Aplicar Derivadas Implícitas
  1. Derivar las funciones de “x” y de “y”.
  2. Donde se derive “y”, colocar $D_x y$
  3. Agrupar los términos con $D_x y$ de un lado de la ecuación, y los que no tienen $D_x y$ del otro lado de la ecuación.
  4. Despejar el $D_x y$.

- Determinación de Máximos y Mínimos
    1. Derivar la función original → *ƒ(x)*
    2. Igualar la derivada a cero.
    3. Resolver la ecuación planteada (Ruffini, Factorización, Ecuación de 2do Grado, etc).
    4. Las raíces halladas en la ecuación constituyen los **puntos críticos**, los cuales se grafican en la recta de números reales.
    5. Evaluar la función original, tomando como valores de “x” a los puntos críticos y los extremos del intervalo dado.
    6. El mayor valor de *ƒ(x)* determina un “x” máximo. El menor valor de *ƒ(x)* determina un “x” mínimo.
- Determinación de Intervalos de Crecimiento y Decrecimiento
    1. Derivar la función original → *ƒ(x)*
    2. Igualar la derivada a cero.
    3. Resolver la ecuación planteada (Ruffini, Factorización, Ecuación de 2do Grado, etc).
    4. Las raíces halladas en la ecuación constituyen los **puntos críticos**, los cuales se grafican en la recta de números reales.
    5. Determinar los intervalos generados por los puntos críticos, y seleccionar valores de “x” en cada intervalo para evaluar la función derivada.
    6. En el intervalo donde la evaluación del valor de “x” en la función derivada sea positivo, el intervalo será creciente. Donde la evaluación sea negativa, el intervalo será decreciente.
- Determinación de Intervalos de Concavidad
    1. Derivar dos veces la función original → *ƒ(x)* (aplicar la segunda derivada)
    2. Igualar la segunda derivada a cero.
    3. Resolver la ecuación planteada (Ruffini, Factorización, Ecuación de 2do Grado, etc).
    4. Las raíces halladas en la ecuación constituyen los **puntos de inflexión**, los cuales se grafican en la recta de números reales.
    5. Determinar los intervalos generados por los puntos de inflexión, y seleccionar valores de “x” en cada intervalo para evaluar la función derivada.

6. En el intervalo donde la evaluación del valor de “x” en la segunda derivada sea positivo, el intervalo será cóncavo hacia arriba. Donde la evaluación sea negativa, el intervalo será cóncavo hacia abajo.

1.7 Ejercicios.

1.7.1 Regla de la Cadena.

(01) $f(x) = sen2x$

(02) $y = \cos(x-1)$

(03) $y = \tan 3x$

(04) $g(x) = \sqrt{\cos x}$

(05) $h(x) = \cos 3x^2$

(06) $h(t) = (3t - 2t^2)^3$

(07) $h(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$

(08) $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

(09) $f(\theta) = sen6\theta$

(10) $y = (3x+2)^5$

(11) $g(x) = x + \tan x^2$

(12) $h(x) = (x^2+1)^3$

(13) $y = e^{4x}$

(14) $y = sen2t.\cos 2t$

(15) $y = \dfrac{sen^2 2\theta}{4}$

1.7.2 Derivadas Implícitas.

(01) $x^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$

(02) $x^2 + y^2 = 16$

(03) $x^{1/2} + y^{1/2} = 9$

(04) $x^3 - xy + y^2 = 4$

(05) $x^3 y^3 - y = x$

(06) $x^3 - 3x^2 y + 2xy^2 = 12$

(07) $senx + 2\cos 2y = 1$

(08) $senx = x(1 + \tan y)$

(09) $y = sen(xy)$

(10) $x^2 - y^2 = 16$

(11) $x^3 + y^3 = 8$

(12) $x^2 y + y^2 x = -2$

(13) $2senx \cos y = 1$

(14) $\cot y = x - y$

(15) $x = \sec \dfrac{1}{y}$

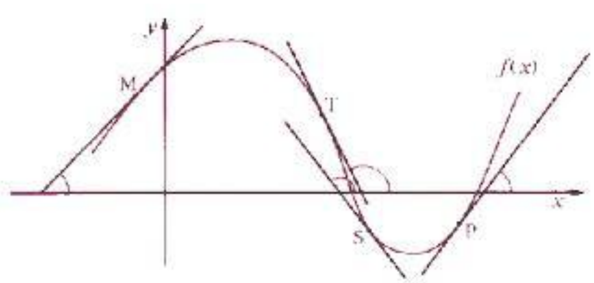
1.7.3 Intervalos de Crecimiento y Decrecimiento, Puntos Críticos, Inflexión, Máximos y Mínimos, Concavidad.

(01) $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$ [-2,2]

(02) $f(x) = \frac{1}{2}x - \text{sen } x$ [0,2π]

(03) $f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$

(04) $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2}$



2 La Antiderivada

2.1 Definición.

- Es la Operación inversa de la Derivación
- Una Función F se llama Antiderivada de una Función f, en un intervalo dado, si:
  - $F'(x) = f(x)\ \forall$ x en el Intervalo.
- Ejemplo:
  - Sea $F(x) = 4x^3 + x^2 + 5$
    - $F'(x) = 12x^2 + 2x$
    - $f(x) = 12x^2 + 2x$
  - Sea $G(x) = 4x^3 + x^2 - 17$
    - $G'(x) = 12x^2 + 2x$
    - $g(x) = 12x^2 + 2x$
- Como $f(x) = g(x)$, una Función $G(x) = F(x) + k$.
- Como G(x) es cualquier antiderivada de f en el Intervalo, cualquier antiderivada de f en el intervalo se puede obtener a partir de:
  - $F(x) + c$ (donde c es una constante arbitraria)
- Si $F'(x) = f(x)$, $d[f(x)] = f(x)\,dx$

2.2 Diferenciación.

- Si $y = f(x)$, cuando $f(x)'$ existe:
  - $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \Delta y = f'(x)\Delta x$
- Si la función f está definida por $y = f(x)$, la diferencial de y (dy) está dada por:
  - $dy = f'(x)\,dx$
- Ejemplo:
  - $y = 3x^2 - x$
    - $f(x) = 3x^2 - x$
    - $f'(x) = 6x - 1$
    - $dy = (6x - 1)\,dx$

- Como dy = $f'(x)$ dx,
    - $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, si dx ≠ 0.

2.3 La Antidiferenciación

- La operación inversa del Diferencial de una Función, consiste en hallar la Función más general que tenga una diferencial dada.
- También se considera como la operación que consiste en calcular la función más general que tenga una derivada dada.
    - $\int f(x)dx = F(x) + c$
- La forma general para resolver una antiderivada es:
    - $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

2.4 La Integral Definida

- Si f es una Función definida en el intervalo cerrado [a, b], entonces la integral definida de f, de a a b, está dada por:
    - $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta_i x$$
    - Si el límite existe.

f(x)	Integrando
a	Límite Inferior
b	Límite Superior
$\int$	Signo de Integración

3 Integral de Riemann[1]

3.1 Sumatoria.

- Se denota con la letra Sigma mayúscula griega (que corresponde a la letra "S").
- Tiene la forma: $\sum_{i=m}^{n} i$, donde *m* y *n* son números enteros, y donde *m* representa el límite o extremo inferior y *n* representa el límite o extremo superior.
- Ejemplo:
  - $\sum_{i=3}^{5} i^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 = 9 + 16 + 25 = 50$
- Teoremas de Sumatoria:
  - $\sum_{i=1}^{n} c = c.n$ (donde c es cualquier constante)
  - $\sum_{i=1}^{n} c.f(i) = c.\sum_{i=1}^{n} f(i)$
  - $\sum_{i=1}^{n} [f(i) + g(i)] = \sum_{i=1}^{n} f(i) + \sum_{i=1}^{n} g(i)$
  - $\sum_{i=a}^{b} f(i) = \sum_{i=a+c}^{b+c} f(i-c)$
  - $\sum_{i=a}^{b} f(i) = \sum_{i=a-c}^{b-c} f(i+c)$
  - $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
  - $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
  - $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

[1] Matemático alemán Friedrich Bernhard Riemann.

- $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$

- Ejemplo:
  - Calcule $\sum_{i=1}^{n} i(3i-2)$

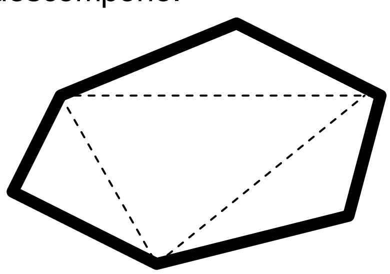
$$\sum_{i=1}^{n} i(3i-2) = \sum_{i=1}^{n}(3i^2-2i) = \sum_{i=1}^{n} 3i^2 + \sum_{i=1}^{n}(-2i) = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i =$$

$$= 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n^3+n^2-n}{2}$$

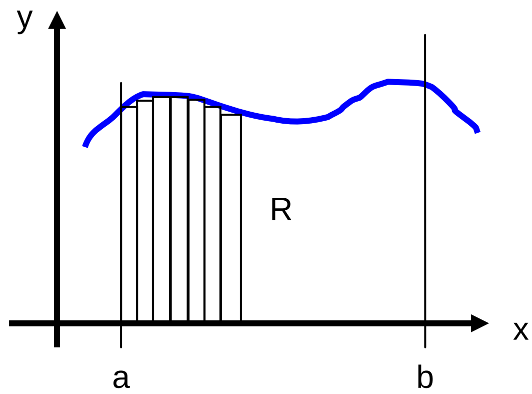
- Ejercicios:
  - $\sum_{i=2}^{5} \frac{i}{i-1}$
  - $\sum_{i=1}^{7} (i+1)^2$
  - $\sum_{i=-2}^{3} 2^i$

3.2 Área de Polígonos y Área bajo la curva.

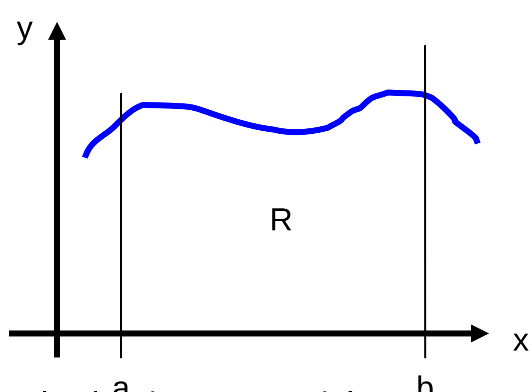
- Área de Polígonos:
  - Puede definirse como la sumatoria de las áreas de los triángulos en que se descompone.



- Área de una Región en un Plano (Área bajo la curva):
  - Consideremos la Región ***R*** en el Plano, acotada por el eje x (abcisa), por las rectas x=a y x=b, y la curva tiene la ecuación y= f(x), donde f es una función continua en [a , b]. Tomemos $f(x) \geq 0 \;\; \forall x \in [a, b]$.



- Se divide el intervalo [a , b] en n subintervalos, de igual longitud (Δx), desde $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, … , $x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x$, $x_n = b$.
- Como ***f*** es una función continua en [a , b], también es continua en cada subintervalo.
- Por el Teorema del Valor Extremo (máximos y mínimos absolutos), se sabe que existe un número ***c***, para el cual ***f*** tiene un valor mínimo absoluto.
- Entonces, se consideran *n* rectángulos, cada uno con Δx unidades de ancho y $f(c)$ unidades de alto, y sea S_n unidades cuadradas la suma de las áreas de los *n* rectángulos, entonces:
- $S_n = f(c_1).\ \Delta x + f(c_2).\ \Delta x + \ldots + f(c_i).\ \Delta x + \ldots + f(c_n).\ \Delta x$
- Lo que es igual a:
  - $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$



- Si aumenta el valor de n, se tendrá un mayor número de rectángulos, y más se aproximará al área de la Región ***R*** (S_n).
- Se concluye que el área viene dada por la fórmula:

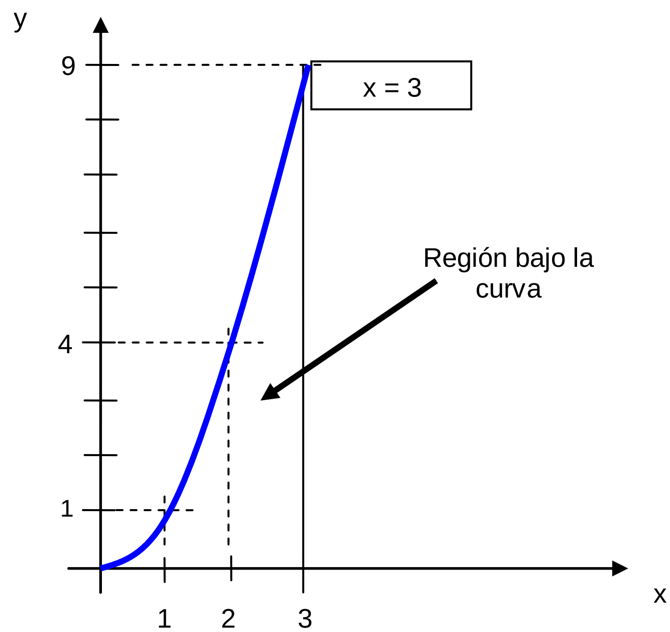
- $$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

- Análogamente, se puede calcular el área con los rectángulos circunscritos, en lugar de los rectángulos inscritos, pero para ello se tomarían los valores máximos absolutos de f en cada subintervalo, en lugar de los valores mínimos.
  - $$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(d_i)\Delta x$$
- Ejemplo:
  - Calcule el área de la región acotada por la curva $y = x^2$, el eje x y la recta x = 3, tomando los rectángulos inscritos.

    Intervalo → [0,3] $f(x) = x^2$

    Se determinan n sub-intervalos, cada uno de longitud Δx→ $x_0 = 0$; $x_1 = \Delta x$; $x_2 = 2 \cdot \Delta x$; …; $x_i = i \cdot \Delta x$; $x_{n-1} = (n-1)\,\Delta x_1$; $x_n = 3$.

    $$\Delta x = \frac{3-0}{n} = \Delta x = \frac{3}{n}$$



x	y
0	0
1	1
2	4
3	9

Vemos que f(x) es creciente en [0,3], y el valor mínimo absoluto de f en el i-ésimo sub-intervalo [x_{i-1} , x_i] es $f(x_{i-1})$.

Como $A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$, y como x_{i-1} = (i – 1) Δx, y $f(x) = x^2$,

entonces: $f(x_{i-1}) = [(i-1)\Delta x]^2$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 \Delta x^3 = \sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 \frac{3^3}{n^3} = \frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 =$$

$$\frac{27}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{9}{2}\right)\left(\frac{2n^2-3n+1}{n^2}\right) = \left(\frac{9}{2}\right)\lim_{n\to+\infty}\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$A = \left(\frac{9}{2}\right)(2-0+0) \therefore A = 9$$

- Ejercicios:
  - Calcule el área del trapecio acotado por la recta 2 x + y = 8, el eje x y las rectas x = 1 y x = 3, tomando los rectángulos inscritos.
  - Calcule el área de la región en el ejemplo [$f(x) = x^2$], tomando los rectángulos circunscritos.

3.3 Suma de Riemann

- Si se recuerda, la medida del área de una región se definió como:
  - $A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$
- En esa oportunidad, el intervalo [a , b] se dividió en n sub-intervalos de igual longitud (Δx), se tomó $f(x) \geq 0$ y que f(x) fuese continua en [a , b].

- Para definir la integral definida (valga la redundancia), los sub-intervalos serán de longitud variable, y f(x) puede tomar cualquier valor (positivo o negativo).
- Sean los puntos: $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$, y sean las longitudes: $\Delta_1 x = x_1 - x_0$; $\Delta_2 x = x_2 - x_1$; ...; $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$; ...; $\Delta_n x = x_n - x_{n-1}$, y llamaremos "Norma de la Partición" (Partición de [a , b] será el conjunto de sus sub-intervalos) a la longitud del sub-intervalo más largo de la Partición || Δ ||.
- Se escoge un punto ε en cada sub-intervalo de la Partición A, tal que en [x_0 , x_1] tenga un $x_0 \leq \varepsilon_1 \leq x_1$, en [x_1 , x_2] tenga un $x_1 \leq \varepsilon_2 \leq x_2$, y así sucesivamente, obteniendo la suma: $f(\varepsilon_1). \Delta_1 x + f(\varepsilon_2). \Delta_2 x + \ldots + f(\varepsilon_i). \Delta_i x + \ldots + f(\varepsilon_n). \Delta_n x$, o bien: $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$, que se conoce como la Suma de Riemann.
- Ejemplo:
  - Sea f(x) = 10 – x2, con x∈ [¼ , 3]. Halle la Suma de Riemann, tomando los puntos:

	0	1	2	3	4	5
x	¼	1	1 ½	1 ¾	2 ¼	3
ε	-	½	1 ¼	1 ¾	2	2 ¾

Norma || Δ || = ¾

$$\sum_{i=1}^{5} f(\xi_i)\Delta_i x = f(\xi_1). \Delta_1 x + f(\xi_2). \Delta_2 x + f(\xi_3). \Delta_3 x + f(\xi_4). \Delta_4 x + f(\xi_5). \Delta_5 x$$

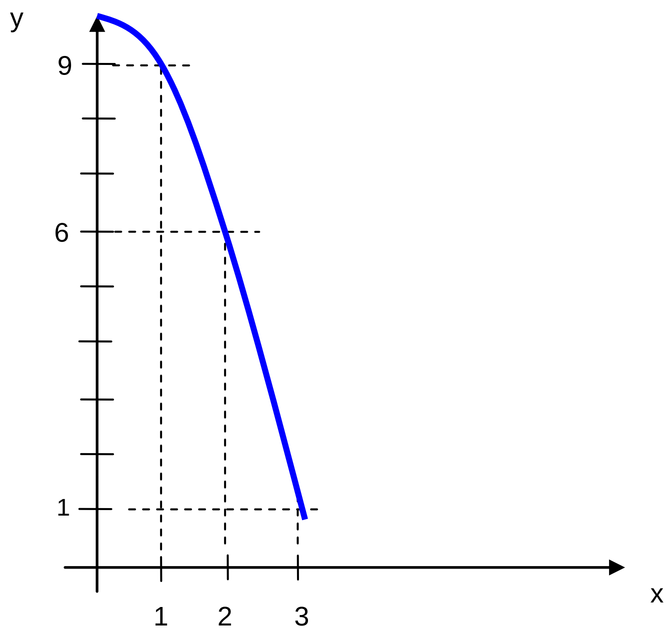
$$\sum_{i=1}^{5} f(\xi_i)\Delta_i x = f(½)(1-¼)+ f(5/4)(1½ -1)+ f(7/4)(1¾-1½)+ f(2)(2¼-1¾)+$$

f(11/4)(3-2¼)

$$\sum_{i=1}^{5} f(\xi_i)\Delta_i x = (\frac{39}{4})(\frac{3}{4}) + (\frac{135}{16})(\frac{1}{2}) + (\frac{111}{16})(\frac{1}{4}) + 6.(\frac{1}{2}) + (\frac{39}{16})(\frac{3}{4}) =$$

$$\sum_{i=1}^{5} f(\xi_i)\Delta_i x = \frac{117}{16} + \frac{135}{32} + \frac{111}{64} + 3 + \frac{117}{64} \Rightarrow \frac{468+270+111+192+117}{64}$$

$$\sum_{i=1}^{5} f(\xi_i)\Delta_i x = \frac{1158}{64} = \frac{579}{32} \approx 18{,}0938$$



x	y
¼	9,94
1	9
2	6
3	1

- Por lo tanto, la interpretación geométrica de la Suma de Reimann sería la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos que se hallen sobre el eje x, más los negativos de las medidas de las áreas de los rectángulos que están bajo el eje x.

3.4 Ejercicios

3.4.1 Notación Sigma o Sumatoria

1. $\sum_{i=1}^{5}(2i+1)$
2. $\sum_{i=3}^{6}k(k-2)$
3. $\sum_{i=0}^{4}\frac{1}{k^2+1}$
4. $\sum_{i=1}^{5}\left[(i-1)^2+(i+1)^3\right]$
5. $\sum_{i=1}^{15}(2i-3)$
6. $\sum_{i=1}^{10}i(i^2+1)$

3.4.2 Cálculo de Área

1. y = -2x + 3 ; [0 , 1]
2. y = 3x - 4; [2 , 5]
3. y = x^2 + 2; [0 , 1]
4. y = x^2 + 1; [0 , 3]
5. y = 16 – x^2; [1 , 3]
6. y = 1 – x^2; [-1 , 1]
7. y = 64 – x^3; [1 , 4]
8. y = 2x – x^3; [0 , 1]

3.4.3 Sumatoria de Reimann.

(01) f(x) = x^3 x∈ [-1,2]

x_0= -1; x_1= -1/3; x_2= ½ ; x_3= 1; x_4= 1 ¼; x_5= 2 . ε_1= - ½ ; ε_2= 0; ε_3= 2/3; ε_4= 1; ε_5= 1 ½

(02) f(x) = x^2 x∈ [0,3]

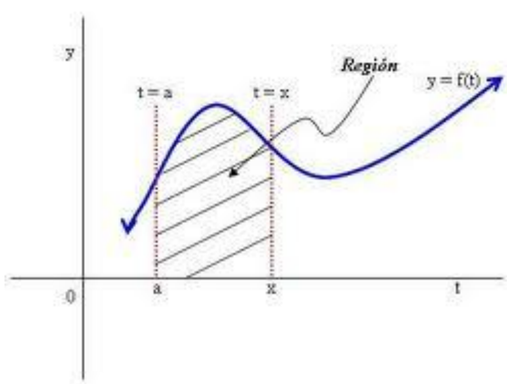
x_0= 0; x_1= ¾ ; x_2= 1 ¼ ; x_3= 2; x_4= 2 ¾; x_5= 3. ε_1= ½ ; ε_2= 1; ε_3= 1 ¾ ; ε_4= 2 ¼ ; ε_5= 2 ¾

(03) f(x) = $\frac{1}{x+2}$ x∈ [-1,3]

x_0= -1; x_1= - ¼ ; x_2= 0; x_3= ½ ; x_4= 1 ¼ ; x_5= 2; x_6= 2 ¼ ; x_7= 2 ¾ ; x_8= 3. ε_1= - ¾ ; ε_2= 0; ε_3= ¼ ; ε_4= 1; ε_5= 1 ½ ; ε_6= 2; ε_7= 2 ½ ; ε_8= 3

(04) f(x) = $|x|+2$ x∈ [-3,3]

x_0= -3; x_1= -1; x_2= 0; x_3= 2; x_4= 3
ε_1= -2,5 ; ε_2= -0,5; ε_3= 1; ε_4= 2,5



4 Integral Definida

4.1 Integral Definida

- Si f es una ecuación definida en [a , b], entonces la Integral Definida de f de *a* a *b* está dada por:
  - $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta_i x$ (si el límite ∃)
- La afirmación "la función f es integrable en [a , b]" es sinónima de "la Integral Definida de f de *a* a *b* ∃".
- En la notación de Integral dada, f(x) es el integrando, a es el límite inferior y b es el límite superior. El ∫ es el símbolo de Integración.
- La Antiderivada se conoce también como "Integral Indefinida".
- Teorema: Si una función f es continua en [a , b], entonces f es integrable en [a , b].

  (Sin embargo, aunque suene paradójico, es posible que la Integral exista, aún cuando la función sea discontinua en algunos puntos en [a , b]).
- Si volvemos a tomar nuevamente a los sub-intervalos establecidos como de igual longitud (Δx) (partición regular), y cada $\Delta_i x = \Delta x$, y la Norma es Δx, obtenemos: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta_i x$
- Sea la función f continua en [a , b] y f(x) ≥ 0 ∀ x∈ [a , b], y sea R la región acotada por la curva y= f(x), el eje x y las rectas x=a y x=b. Entonces la medida del área de la región R está dada por:

  $$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta_i x = \int_a^b f(x)dx$$

  - Ello establece que si f(x) ≥ 0 ∀ x∈ [a , b], la Integral Definida $\int_a^b f(x)dx$ se puede interpretar geométricamente como la medida del área de la región R.

- Ejemplo:
  - Calcule el valor exacto de la Integral Definida: $\int_1^3 x^2 dx$

x∈ [1 , 3]; Δx = $\frac{2}{n}$

Tomamos los puntos extremos derechos de cada sub-intervalo:

$$\varepsilon_1 = 1+\frac{2}{n}; \varepsilon_2 = 1+2(\frac{2}{n}); \varepsilon_3 = 1+3(\frac{2}{n});...;\varepsilon_i = 1+i(\frac{2}{n});...;\varepsilon_n = 1+n(\frac{2}{n})$$

Como f(x) = x^2 → $f(\varepsilon_i) = (1+\frac{2i}{n})^2 \Rightarrow f(\varepsilon_i) = (\frac{n+2i}{n})^2$

Entonces, $\int_1^3 x^2 dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n (\frac{n+2i}{n})^2 (\frac{2}{n}) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^3} \sum_{i=1}^n (n^2 + 4ni + 4i^2) \Rightarrow$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^3} (n^2 \sum_{i=1}^n 1 + 4n \sum_{i=1}^n i + 4\sum_{i=1}^n i^2)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^3} [n^2 n + 4n.\frac{n(n+1)}{2} + \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^3} [n^3 + 2n^3 + 2n^2 + \frac{2n(2n^2+3n+1)}{3}]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^3} [6 + \frac{4}{n} + \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}] = 6+0+\frac{8}{3}+0+0 = 6+\frac{8}{3} = \frac{18+8}{3} \Rightarrow A = \frac{26}{3}$$

- Ejercicios:
  - Halle la suma de Reimann para las siguientes funciones:
    - f(x) = x^2 , x∈ [0 , 3]
      - x_0=0; x_1= ½ ; x_2= 1 ¼ ; x_3= 2 ¼ ; x_4=3
      - ε_1= ¼ ; ε_2= 1 ; ε_3= 1 ½ ; ε_4= 2 ½
    - f(x) = $\frac{1}{x}$, x∈ [1 , 3]
      - x_0=1; x_1= 1 $\frac{2}{3}$; x_2= 2 ¼ ; x_3= 2 $\frac{2}{3}$; x_4=3
      - ε_1= 1 ¼ ; ε_2= 2 ; ε_3= 2 ½ ; ε_4= 2 ¾
    - f(x) = x^2– x + 1, x∈ [0 , 1]
      - x_0=0; x_1= 0,2 ; x_2= 0,5; x_3= 0,7; x_4=1

- ε_1= 0,1 ; ε_2= 0,4 ; ε_3= 0,6 ; ε_4= 0,9

  - Halle el valor de la Integral Definida:
    - $\int_0^2 x^2 dx$
    - $\int_1^2 x^3 dx$
    - $\int_{-2}^2 (x^3+1) dx$

4.2 Propiedades de la Integral Definida:

- Si a > b, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- Si f(a) ∃, $\int_a^a f(x)dx = 0$
- Si Δ es cualquier partición en [a, b], entonces $\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum \Delta_i x = b - a$
- Si f está definida en [a , b] y si $\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i)\Delta_i x$ ∃, donde Δ es cualquier partición de [a , b], y si entonces k es cualquier constante, $\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^n k.f(\varepsilon_i)\Delta_i x = k.\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i)\Delta_i x$
- Si k es cualquier constante , entonces $\int_a^b k dx = k(b-a)$
- Si f es integrable en [a , b] y k es cualquier constante, entonces $\int_a^b k f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

- Si f y g son funciones integrables en [a , b], entonces f + g es integrable en [a , b], y entonces: $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- Si f es integrable en [a , b]; [a , c] y [c , b], donde a < c < b, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- Si f es integrable en un intervalo cerrado que contiene a a, b y c, entonces (independientemente del orden de a, b y c): $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- Si las funciones f y g son integrables en [a , b], y si f(x) ≥ g(x) ∀ x ∈[a , b], entonces: $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
- Si f es continua en [a , b], y si m y M son, respectivamente, los valores mínimos y máximos absolutos de f en [a , b], donde m ≤ f(x) ≤ M para ∀ x∈[a , b], entonces: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

4.3 Teorema Fundamental del Cálculo

- Sea la función f continua en [a , b] y sea x cualquier número en [a , b]. Si F es la función definida por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, entonces, F'(x) = f(x).
- Si x=a, la derivada de F'(x) puede ser una derivada por la derecha, y si x=b puede ser derivada por la izquierda.
- Sea la función f continua en [a , b] y sea g una función tal que g'(x) = f(x) ∀ x ∈[a , b]. Entonces: $\int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a)$
- Si x=a, la derivada de g'(x) puede ser una derivada por la derecha, y si x=b la derivada de g'(x) puede ser una derivada por la izquierda.

- Ejemplo:
  - Evaluar $\int_1^3 x^2 dx$

f(x) = x^2. La antiderivada de x^2 es $\frac{1}{3}$ x^3.

g(x) = $\frac{1}{3}$ x^3

$$\int_1^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

- Ejemplo:
  - Evaluar $\int_1^3 (3x^2 - 5x + 2)dx$

$$= \int_1^3 3x^2 dx - \int_1^3 5x dx + \int_1^3 2dx = 3\int_1^3 x^2 dx - 5\int_1^3 x dx + 2(3-1) = 3(\frac{26}{3}) - 5(4) + 4 =$$

= 26 – 20 + 4 = 10

- El proceso de "evaluar" una Integral Indefinida o Definida se llama "integración".
- La **Integral Indefinida** es una función g tal que su derivada g'(x) = f(x).
- La **Integral Definida** $\int_a^b f(x)dx$ es un número cuyo valor depende de la función f y de los números a y b, y se define como el límite de una Suma de Riemann.
- La diferencia entre ambas Integrales, es que la Integral Indefinida general incluye una constante arbitraria "C".
- Por ejemplo: $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$. Esa constante "C" se llama "Constante de Integración".

- Ejemplo:
  - Evaluar:
    - $$\int_{1/2}^{4}(x^3-6x^2+9x+1)dx$$

$$\int_{1/2}^{4}(x^3-6x^2+9x+1)dx=\int_{1/2}^{4}x^3dx-\int_{1/2}^{4}6x^2dx+\int_{1/2}^{4}9xdx+\int_{1/2}^{4}1dx=$$

$$=\frac{x^4}{4}-6\frac{x^3}{3}+9\frac{x^2}{2}+x\ \Big|_{1/2}^{4}=(64-128+72+4)-(\frac{1}{64}-\frac{1}{4}+\frac{9}{8}+\frac{1}{2})=$$

$$=\frac{679}{64}$$

- Ejercicios
  - $\int_{-1}^{1}(x^{4/3}+4x^{1/3})dx$
  - $\int_{0}^{2}(2x^2\sqrt{x^3+1})dx$

4.4 Teorema del Valor Medio para Integrales

- Si la función f es continua en [a , b], entonces existe un número x∈[a , b] tal que, $\int_a^b f(x)dx=f(x)(b-a)$, a ≤ x ≤ b
- El valor de x no es necesariamente único. El Teorema no da un método para encontrar x, pero establece la existencia de un valor de x, y ello se emplea para demostrar otros Teoremas.
- Si la función f es integrable en [a , b], el valor promedio (o valor medio) de f en [a , b] es: $VP\left(\bar{x}\right)=\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$
- Ejemplo:
  - Sea f(x) = x^2, encontrar el valor promedio (VP) de f en [1 , 3].

$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3}$$

$$VP = \frac{\frac{26}{3}}{3-1} \Rightarrow VP = \frac{13}{3}$$

- Una aplicación importante de este Teorema se da en Física e Ingeniería, en relación al concepto de Centro de Masa. En economía se utiliza para encontrar un costo promedio total o ingreso promedio total.
- Ejercicios:
  - Encuentre el valor de x que satisfaga el Teorema del Valor Medio para las Integrales:
    - $\int_0^2 x^2 dx$
    - $\int_1^2 x^3 dx$
    - $\int_1^4 (x^2 + 4x + 5) dx$

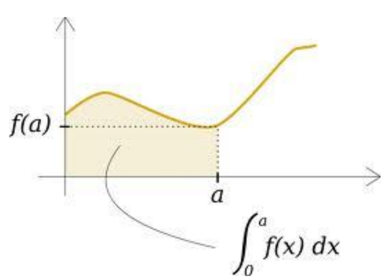
4.5 Ejercicios

4.5.1 Aplique el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver las siguientes Integrales:

1. $\int_1^4 \left(x^2 + 3x\right) dx$
2. $\int_0^5 \left(3x^4 + 2x^3 + x^2\right) dx$
3. $\int_2^4 \left(3x^2 + 2x + 4\right) dx$
4. $\int_0^3 \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\right) dx$

4.5.2 Determine el Valor Medio de las siguientes funciones en los intervalos respectivos:

1. $f(x) = 3x^2 - 2x \qquad [1,4]$
2. $f(x) = x - 2\sqrt{x} \qquad [0,2]$
3. $f(x) = \frac{9}{x^3} \qquad [1,3]$
4. $f(x) = 4 - x^2 \qquad [-2,2]$



5 Integrales de Funciones Trascendentes.

5.1 Función Biunívoca.

- Una Función es Biunívoca (o uno a uno) ssi x_1 y x_2 son dos números diferentes cualesquiera, en el dominio de f, y $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Ejemplo:
  - $f(x) = x^2$. Dom = R; Rango = [0 , +∞]

    $x_1 = 2$ $\quad f(x_1) = 2^2 \rightarrow f(x_1) = 4$

    $x_2 = -2$ $\quad f(x_2) = (-2)^2 \rightarrow f(x^2) = 4$

    Como $f(x_1) = f(x_2)$, f no es Biunívoca.
- Ejercicios:
  - Determine si las siguientes funciones son Biunívocas:
    - $f(x) = 4 - x^2$. $x \in$ R
    - $g(x) = x^3$. $x \in [-2 , 2]$
    - $h(x) = 4x - 3$. $x \in$ R

5.2 Teorema de Función Biunívoca.

- Una Función que es creciente o decreciente en un intervalo, es Biunívoca en ese intervalo.

> Recordar:
>
> Sea f una función continua en [a , b] y diferenciable en (a , b):
> - Si $f'(x) > 0 \ \forall \ x \in (a , b)$, f es creciente en [a , b]
> - Si $f'(x) < 0 \ \forall \ x \in (a , b)$, f es decreciente en [a , b]

- Ejemplo:
  - Determinar si $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$ es Biunívoca

    Dominio = R – { 1 }

    $f'(x) = -\dfrac{5}{(x-1)^2}$

    Como $f'(x) < 0 \ \forall \ x \neq 1$, $f(x)$ es decreciente y por lo tanto biunívoca en el intervalo.

- Función Inversa:
    - Sea la función Biunívoca:
        - g(x) = y = x3, x$\in$ [-2, 2]

          Resolvemos la ecuación para x:

          x = $\sqrt[3]{y}$, y $\in$ [-8, 8]

          Lo cual define otra función (G):

          G(y) = $\sqrt[3]{y}$, y $\in$ [-8, 8]

          Siendo G(y) la Función Inversa de g(x) (o g^{-1}(y))
- Si f es una función Biunívoca, la cual es el conjunto de pares ordenados (x , y), entonces existe una función f^{-1}, denominada la inversa de f, donde f^{-1} es el conjunto de pares ordenados (y , x):
    - x = f^{-1}(y) ssi y = f(x)
    - El dominio de f^{-1} es el rango de f, y el rango de f^{-1} es el dominio de f.
- Teorema de Función Inversa:
    - Si f es una Función Biunívoca que tiene f^{-1} como su inversa, entonces f^{-1} es una Función Biunívoca que tiene a f como inversa.
        - $f^{-1}[f(x)] = x$, $\forall$ x en el Dominio de f.
        - $f[f^{-1}(x)] = x$, $\forall$ x en el Dominio de f^{-1}.
- Ejemplo:
    - Sea f(x) = 4 x – 3 una Función Biunívoca. Halle f^{-1}(x).

      f(x) = 4 x – 3; y = 4 x – 3

      $$x = \frac{y+3}{4}$$

      $$f^{-1}(y) = \frac{y+3}{4}; \quad f^{-1}(x) = \frac{x+3}{4}$$
- Ejercicios:
    - Halle f^{-1}(x) de $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$
- Si f tiene como dominio [a , b], entonces:
    - Si f es continua y creciente en [a , b], f tiene una inversa f^{-1} definida en [f(a), f(b)]

- Si f es continua y decreciente en [a , b], f tiene una inversa f^{-1} definida en [f(b), f(a)]

5.3 Teorema de Función Inversa para Funciones Crecientes y Decrecientes

- Sea la función f continua y creciente en [a , b]. Entonces si f^{-1} es su inversa, la cual está definida en [f(a), f(b)]:
  - f^{-1} es creciente en [f(a), f(b)]
  - f^{-1} es continua en [f(a), f(b)]
- Sea la función f continua y decreciente en [a , b]. Entonces si f^{-1} es su inversa, la cual está definida en [f(b), f(a)]:
  - f^{-1} es decreciente en [f(b), f(a)]
  - f^{-1} es continua en [f(b), f(a)]

5.4 Función Logarítmica.

- Sean los números; $a^x.a^y = a^{x+y}$; $a^0 = 1$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a^x = N$ (donde $a \in (1, \infty)$ y N > 0); $x = \log_a N$
- Recordando las propiedades de los Logaritmos con a=10 (Base 10):
  - log 1 = 0
  - log M.N = log M + log N
  - $\log \frac{M}{N} = \log M - \log N$
  - $\log M^n = n \log M$
  - log 10 = 1
- La función logarítmica natural se define como :
  - $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$; $\forall$ x > 0
- Si u es una función diferenciable de x y y → u(x) > 0, entonces: $D_x(\ln u) = \frac{1}{u} D_x u$
- Ejemplo:
  - Sea y = ln ($3x^2$ – 6x + 8). Halle dy/dx.

    $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x^2 - 6x + 8}(6x - 6) = \frac{6x - 6}{3x^2 - 6x + 8}$$

- Ejercicios:
  - Sea y = ln [(4x^2+3(2x-1)]. Halle dy/dx.
  - Sea y = ln $\left(\frac{x}{x+1}\right)$. Halle dy/dx.

5.5 Propiedades de la Función Logarítmica Natural.

- El Dominio es el conjunto de Números Positivos
- El Rango es el conjunto de Números Reales
- La función es creciente en todo su dominio
- La función es continua es todo su dominio
- La gráfica es cóncava hacia abajo en todo punto.
- La gráfica es asintótica a la parte negativa del eje y a través del cuarto cuadrante.

5.6 Teoremas de los Logaritmos Naturales

- ln 1 = 0
- ln (a.b) = ln a + ln b
- ln $\frac{a}{b}$ = ln a – ln b, $\forall$ a $\wedge$ b > 0
- ln a^r = r ln a
- Ejemplo:
  - Sea y = ln [(4x2+3)(2x-1), halle dy/dx (D_xy)

    y = ln (4x^2+3) + ln (2x-1)

    $$y = \frac{8x}{4x^2+3} + \frac{2}{2x-1} \Rightarrow y = \frac{24x^2 - 8x + 6}{(4x^2+3)(2x-1)}$$
- Ejercicios:
  - Sea y = ln (2x – 1)^3, Halle dy/dx
  - Sea y = ln (4 + 5x), Halle dy/dx
  - Sea y = ln (3x + 1)^2, Halle dy/dx

5.7 Diferenciación e Integración Logarítmica

- Si u es una función diferenciable de x, D_x (ln |u|)= $\frac{1}{u}D_x u$
- Ejemplo:
  - Sea $y=\frac{\sqrt[3]{x+1}}{(x+2)\sqrt{x+3}}$; halle $D_x y$

    $$|y|=\left|\frac{\sqrt[3]{x+1}}{(x+2)\sqrt{x+3}}\right| \Rightarrow |y|=\frac{|\sqrt[3]{x+1}|}{|x+2|.|\sqrt{x+3}|}\Rightarrow$$

    $$\ln|y|=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln|x+3| \Rightarrow \frac{D_x y}{y}=\frac{1}{3(x+1)}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2(x+3)}\Rightarrow$$

    Sustituimos a y por su valor inicial…

    $$D_x y=\frac{(x+1)^{1/3}}{(x+2)(x+3)^{1/2}}\frac{2x^2+10x+12-6x^2-24x-18-3x^2-9x-6}{3(x+1)(x+2)(x+3)}\Rightarrow$$

    $$D_x y=\frac{-7x^2-23x-12}{6(x+1)^{2/3}(x+2)^2(x+3)^{3/2}}$$

    Dicho proceso se conoce como “Diferenciación Logarítmica”, ideada por Johann Bernoulli[2].

- Teorema:
  - $\int \frac{1}{u}du=\ln|u|+C$
  - Y para cualquier n ∈ R:
    - $$\int u^n du = \begin{cases} \frac{u^{n+1}}{n+1}+C, & \text{si } n \neq -1 \\ \ln|u| + C, & \text{si } n = -1 \end{cases}$$
  - $\int \ln u\,du = u\ln u - u + C$
  - Ejemplo:
    - Halle $\int \frac{x^2 dx}{x^3+1}$

[2] Matemático, médico y filólogo suizo

$$\frac{1}{3}\int\frac{3x^2dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\ln|x^3+1|+C$$

- Ejercicios:
  - $\int\frac{\ln x}{x}dx$
  - $\int\frac{dx}{3-2x}$
  - $\int\frac{3x}{x^2+4}dx$

5.8 Función Exponencial

- La Función Logaritmo Natural es creciente en todo su dominio, y tiene una inversa, que también es creciente, la cual se denomina Función Exponencial.
  - exp(x) = y; ssi x = ln y (Se lee "Exponencial de X")
- Como el Rango de la función "ln" es el conjunto R, el Dominio de la Función Exponencial es el conjunto R.
- El Rango de la función Exponencial es el conjunto de los números positivos (ya que ese es el Dominio de la Función ln).
  - Entonces: ln[exp(x)] = x $\wedge$ exp[ln(x)] = x
  - Si a > 0 $\wedge$ x$\in$ R,
    - a^x = exp(x ln a)
    - ln a^x = x ln a
- e = exp (1) (e[3])
  - ln e = 1
  - exp(x) = e^x
  - e^x = y; ssi x = ln y
  - ln e^x = x
  - $e^{\ln x}$ = x
  - $a^x = e^{x \ln a}$; $\forall$ a > 0
  - $e^a . e^b = e^{a+b}$; $\forall$ a $\wedge$ b $\in$ R

[3] e: número de Euler (Leonhard Euler) $\approx$ 2,7182818

- $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$; $\forall$ a $\wedge$ b $\in$ R
- $(e^a)^b = e^{a.b}$
- $\int e^u du = e^u + C$

- Ejemplos:
  - Calcule $2^{\sqrt{3}}$

    $2^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3}\ln 2} = e^{1,2} \approx 3,32$

- Ejercicios:
  - Dado: $y = e^{\frac{1}{x^2}}$, halle dy/dx
  - Determine: $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$
  - Halle el área bajo la curva $y=e^x$ y limitada por los ejes coordenados y la recta x=2.

5.9 Función Exponencial con Base a

- $f(x) = a^x$, $\forall$ a> 0 $\wedge$ x$\in$R
- La función exponencial con Base a cumple las mismas propiedades que la función exponencial con Base e.
- $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln .a} + C$; $\forall$ a ≠ 1 $\wedge$ a > 0

5.10 Función Logarítmica con Base a

- Es la función inversa a la Función Exponencial con Base a.
- y = $\log_a$ x ssi $a^y = x$

5.11 Relación entre Funciones Logarítmicas

- $\log_a x = \frac{\ln .x}{\ln .a}$
- $\log_a e = \frac{\ln .e}{\ln .a} = \frac{1}{\ln .a}$

- Teoremas:
  - Si u es una función diferenciable de x, $D_x(\log_a u) = \frac{\log_a e}{u} D_x u$
  - Si n $\in$ R $\wedge$ $f(x) = x^n$, $\forall$ x > 0, $f'(x) = n.x^{n-1}$
  - La Función Logarítmica com Base a cumple las mismas propriedades que la Función Logarítmica Natural:
    - $\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y$
    - $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$
    - $\log_a 1 = 0$
    - $\log_a x^y = y \log_a x$
  - Ejemplo:
    - Dada $y = \log_{10} \frac{x+1}{x^2+1}$; halle dy/dx

      $y = \log_{10}(x+1) – \log_{10}(x^2+1) \rightarrow$

      $$\frac{dy}{dx} = \frac{\log_{10} e}{x+1} - \frac{\log_{10} e}{x^2+1} - 2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \log_{10} e\left(\frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1}\right) \Rightarrow$$

      $$\frac{dy}{dx} = \log_{10} e\left(\frac{1-2x-x^2}{(x+1)(x^2+1)}\right)$$
  - Ejercicio:
    - Dada $y = x^x$, $\forall$ x > 0, Halle dy/dx
      - (aplique e y ln, para hallarlo por ambas vías)

5.12 Funciones Trigonométricas

- $\tan.x = \frac{sen.x}{\cos.x}$
- $\sec.x = \frac{1}{\cos.x}$

$\forall$ x $\in$ R, para los cuales cos x ≠ 0

- $\cot.x = \frac{\cos.x}{sen.x}$
- $\csc.x = \frac{1}{sen.x}$

$\forall$ x $\in$ R, para los cuales sen x ≠ 0

- tan x y sec x no están definidas cuando cos x = 0
- cot x y csc x no están definidas cuando sen x = 0

- Algunas Identidades Trigonométricas:
    - $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$
    - $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
    - $\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$
    - sen x. csc x = 1
    - cos x . sec x = 1
    - tan x . cot x = 1
    - $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$
    - tan (-b) = - tan b (Función Impar)
    - $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

5.13 Teoremas de Diferenciación de Funciones Trigonométricas

- (sen u)' = cos u $D_x u$
- (cos u)' = - sen u $D_x u$
- (tan u)' = $\sec^2$ u $D_x u$
    - Ejemplo: $f(x) = 2 \tan \frac{x}{2} - x$. Halle $f(x)'$.

      $f(x)' = 2 \sec^2 \left(\frac{x}{2}\right) \frac{1}{2} - 1 \rightarrow f(x)' = \sec^2 \left(\frac{x}{2}\right) - 1 \rightarrow f(x)' = \tan^2 \left(\frac{x}{2}\right)$
- (cot u)' = - $\csc^2$ u $D_x u$
- (sec u)' = sec u tan u $D_x u$
    - Ejemplo: $f(x) = \sec^4 3x$. Halle $f(x)'$.

      $f(x)' = 4 \sec^3 3x (\sec 3x \cdot \tan 3x)\, 3 \rightarrow f(x)' = 12 \sec^4 3x \cdot \tan 3x$
- (csc u)' = - csc u cot u $D_x u$
    - Ejemplo: $f(x) = \cot x \cdot \csc x$. Halle $f(x)'$.

      $f(x)' = \cot x \cdot (\csc x)' + \csc x \cdot (\cot x)' \rightarrow$

      $f(x)' = \cot x\, (-\csc x \cdot \cot x) + \csc x\, (-\csc^2 x) \rightarrow$

      $f(x)' = -\csc x \cdot \cot^2 x - \csc^3 x$

5.14 Teoremas de Integración de Funciones Trigonométricas

- $\int sen.udu = -\cos u + C$
- $\int \cos udu = sen.u + C$
- $\int \tan udu = \ln|\sec u| + C$
- $\int \tan udu = -\ln|\cos u| + C$
  - Ejemplo: Halle $\int \tan 3xdx$

    $$\int \tan 3xdx = \frac{1}{3}\int \tan 3x(3dx) = \frac{1}{3}\ln|\sec 3x| + C$$
- $\int \cot udu = \ln|senu| + C$
- $\int \sec udu = \ln|\sec u + \tan u| + C$
- $\int \csc udu = \ln|\csc u - \cot u| + C$
  - Ejemplo: Halle $\int \csc 2xdx$

    $$\int \csc 2xdx = \frac{1}{2}\int \csc 2x(2dx) = \frac{1}{2}\ln|\csc 2x - \cot 2x| + C$$
- $\int \sec^2 udu = \tan u + C$
- $\int \sec u \tan udu = \sec u + C$
- $\int \csc^2 udu = -\cot u + C$
- $\int \csc u \cot udu = -\csc u + C$
- Ejemplos:
  - Halle $\int \frac{2+3\cos u}{sen^2 u}du$

    $$\int \frac{2+3\cos u}{sen^2 u}du = 2\int \frac{1}{sen^2 u}du + 3\int \frac{1}{senu}.\frac{\cos u}{senu}du =$$

    $$2\int \csc^2 udu + 3\int \csc u.\cot u.du = -2\cot u - 3\csc u + C$$

- Halle $\int \tan^3 x dx$

  $\int \tan^3 x dx = \int \tan x(\sec^2 x - 1)dx = \int \tan x.\sec^2 x dx - \int \tan x.dx =$

  $= \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$ (o)

  $= \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\sec x| + C$

- Ejercicios:
  - Halle $\int \cot^4 x3xdx$
  - Halle $\int \csc^6 xdx$
  - Halle $\int \tan^5 x.\sec^4 xdx$
  - Halle $\int \tan^5 x \sec^7 xdx$

5.15 Funciones Trigonométricas Inversas

- Función Seno Inverso (sen^{-1}):
  - y = sen^{-1}x ssi x = sen y; y ∈ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
  - Dominio → x ∈ [-1 , 1]
  - Rango → y ∈ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
  - Se deduce que:
    - sen(sen^{-1}x) = x; ∀ x ∈ [-1 , 1] y
    - sen^{-1}(sen y) = y; ∀ y ∈ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- Función Coseno Inverso ($\cos^{-1}$):
  - y = $\cos^{-1}$x ssi x = cos y; y ∈ $[0, \pi]$
  - Dominio → x ∈ [-1 , 1]
  - Rango → y ∈ $[0, \pi]$
  - Se deduce que:
    - cos($\cos^{-1}$x) = x; ∀ x ∈ [-1 , 1] y

- $\cos^{-1}(\cos y) = y;\ \forall\ y \in [0,\pi]$

- Función Tangente Inversa ($\tan^{-1}$):
  - $y = \tan^{-1}x$ ssi $x = \tan y;\ \forall\ y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
  - Dominio → $x \in R$
  - Rango → $y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
- Función Cotangente Inversa ($\cot^{-1}$):
  - $\cot^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x;\ \forall\ x \in R$
- Función Secante Inversa ($\sec^{-1}$):
  - $\sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right);\ \forall\ |x| \geq 1$
- Función Cosecante Inversa ($\csc^{-1}$):
  - $\csc^{-1} x = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right);\ \forall\ |x| \geq 1$
- Ejercicios:
  - Halle $\sec[\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)]$
  - Halle $\operatorname{sen}[2\cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)]$

5.16 Derivadas de Funciones Trigonométricas Inversas

- $(\operatorname{sen}^{-1} u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$
- $(\cos^{-1} u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$
- $(\tan^{-1} u)' = \frac{1}{1+u^2} D_x u$
- $(\cot^{-1} u)' = -\frac{1}{1+u^2} D_x u$

- $(\sec^{-1} u)' = \dfrac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} D_x u$
- $(\csc^{-1} u)' = -\dfrac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} D_x u$
- Ejemplos:
  - Sea $y = x^3 \cot^{-1} \frac{1}{3}x$; halle y' (dy/dx)

    $$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \cot^{-1}\frac{1}{3}x + x^3 \frac{(-1)}{1+\frac{1}{9}x^2} - \frac{1}{3} = 3x^2 \cot^{-1}\frac{1}{3}x - \frac{3x^3}{9+x^2}$$

  - Sea $(x+y) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$; halle $D_x y$

    $$\frac{1}{x+y}(1+D_x y) = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{y - xD_x y}{y^2} \Rightarrow \frac{1+D_x y}{x+y} = \frac{y-xD_x y}{y^2+x^2} \Rightarrow$$

    $$y^2 + x^2 + (y^2+x^2)D_x y = x.y + y^2 - (x^2 + x.y)D_x y \Rightarrow D_x y = \frac{x.y - x^2}{2x^2 + x.y + y^2}$$

5.17 Integrales de Funciones Trigonométricas Inversas

- $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = sen^{-1} u + C$
- $\displaystyle\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} u + C$
- $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \sec^{-1}|u| + C$
- $\displaystyle\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$; $\forall$ a ≠ 0
- $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = sen^{-1}\frac{u}{a} + C$; $\forall$ a > 0
- $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C$; $\forall$ a > 0

- Ejemplo:
  - Halle $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$

    $$\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x)}{\sqrt{4-(3x^2)}} = \frac{1}{3} sen^{-1}\frac{3x}{2} + C$$

  - Halle $\int \frac{dx}{3x^2-2x+5}$

    $$\int \frac{dx}{3x^2-2x+5} = \int \frac{dx}{3(x^2-\frac{2}{3}x)+5} = \int \frac{dx}{3(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9})+5-\frac{1}{3}} =$$

    $$= \int \frac{dx}{3(x-\frac{1}{3})^2+\frac{14}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{3})^2+\frac{14}{9}} = \frac{1}{3}\frac{3}{\sqrt{14}}\tan^{-1}\left(\frac{x-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\sqrt{14}}\right) + C =$$

    $$= \frac{1}{\sqrt{14}}\tan^{-1}\left(\frac{3x-1}{\sqrt{14}}\right) + C$$

- Ejercicios:
  - Halle $\int \frac{(2x+7)dx}{x^2+2x+5}$
  - Halle $\int \frac{3dx}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+3}}$
  - Halle el área bajo la curva en el primer cuadrante de y = $\frac{1}{1+x^2}$, limitado por el eje x, el eje y, x = 1.

5.18 Funciones Hiperbólicas[4]

- $senh.x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; Dominio y Rango $\in$ R
- $\cosh.x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; Dominio → x $\in$ R y Rango → y $\in$ [1 , +∞]
  - senh(-x) = - senh x $\wedge$ cosh(-x) = cosh x

[4] Se relacionan con las coordenadas de una Hipérbola Equilátera como referencia, en vez de la circunferencia.

- $\tanh.x = \dfrac{senh.x}{\cosh.x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
- $\coth.x = \dfrac{\cosh.x}{senh.x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
- $\sec h.x = \dfrac{1}{\cosh.x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$
- $\csc h.x = \dfrac{1}{senh.x} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$
- $\tanh.x = \dfrac{1}{\coth.x}$
- $\cosh^2 x – senh^2 x = 1$
- $1 – \tanh^2 x = sech^2 x$
- $1 – \coth^2 x = - csch^2 x$
- $\cosh x + senh x = e^x$
- $\cosh x – senh x = e^{-x}$
- senh (x+y) = senh x . cosh y + cosh x . senh y
- cosh (x+y) = cosh x . cosh y + senh x . senh y
- senh 2x = 2 senh x . cosh x
- cosh 2x = $\cosh^2 x + senh^2 x$
- cosh 2x = 2 $senh^2 x + 1$
- cosh 2x = 2 $\cosh^2 x – 1$

5.19 Derivadas de Funciones Hiperbólicas

- (senh u)’ = cosh u $D_x u$
- (cosh u)’ = senh u $D_x u$
- (tanh u)’ = $sech^2$ u $D_x u$
- (coth u)’ = - $csch^2$ u $D_x u$
- (sech u)’ = - sech u . tanh u $D_x u$
- (csch u)’ = - csch u . coth u $D_x u$
- Ejemplos:
  - y = tanh ($1 – x^2$). Halle $D_x y$ (y’).

    y’ = - 2 x $sech^2$ ($1 – x^2$)

- y = ln senh x. Halle $D_x y$ (y’).

$$y' = \frac{1}{senhx}.\cosh x \Rightarrow y' = \frac{\cosh x}{senhx} \Rightarrow y' = \coth x$$

5.20 Teoremas de Integración de Funciones Hiperbólicas

- $\int senh.udu = \cosh u + C$
- $\int \cosh udu = senh.u + C$
- $\int \sec h^2.udu = \tanh u + C$
- $\int \csc h^2.udu = -\coth u + C$
- $\int \sec h.u.\tanh udu = -\sec hu + C$
- $\int c\sec h.u.\coth udu = -\csc hu + C$
- Ejemplos:
  - Halle: $\int senh^3 x.\cosh^2 xdx$

$$\int senh^3 x.\cosh^2 xdx = \int senh^2 x.\cosh^2 x(senhx.dx) = \int (\cosh^2 x - 1)\cosh^2 x(senhx.dx) =$$

$$\int \cosh^4 x(senh.xdx) - \int \cosh^2 x(senhx.dx) = \frac{1}{5}\cosh^5 x - \frac{1}{3}\cosh^3 x + C$$

  - Halle: $\int \sec h^4 xdx$

$$\int \sec h^4 xdx = \int \sec h^2 x(\sec h^2 xdx) = \int (1 - \tanh^2 x)(\sec h^2 xdx) =$$

$$= \int \sec h^2 xdx - \int \tanh^2 x(\sec h^2 xdx) = \tanh x - \frac{1}{3}\tanh^3 x + C$$

5.21 Funciones Hiperbólicas Inversas

- $senh^{-1}$
  - y = $senh^{-1}$ x ssi x = senh y
  - senh($senh^{-1}$x) = x (Dominio = Rango = R)
  - $senh^{-1}$(senh y) = y (Dominio = Rango = R)
- $cosh^{-1}$
  - y = $cosh^{-1}$ x ssi x = cosh y; ∀ y ≥ 0.

- $\cosh(\cosh^{-1}x) = x$ (si $x \geq 1$)
- $\cosh^{-1}(\cosh y) = y$ (si $y \geq 0$)

- $\tanh^{-1}$
  - $y = \tanh^{-1} x$ ssi $x = \tanh y$
- $\coth^{-1}$
  - $y = \coth^{-1} x$ ssi $x = \coth y$
- csch^{-1}
  - $y = \operatorname{csch}^{-1} x$ ssi $x = \operatorname{csch} y$
- sech-1
  - $y = \operatorname{sech}^{-1} x$ ssi $x = \operatorname{sech} y$ ($y \geq 0$)

5.22 Funciones Hiperbólicas Inversas en Términos Logarítmicos

- $\operatorname{senh}^{-1} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ ($\forall$ x $\in$ R)
- $\cosh^{-1} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$ ($\forall$ $x \geq 1$)
- $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ ($|x| < 1$)
- $\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$ ($|x| > 1$)

5.23 Derivadas de Funciones Hiperbólicas Inversas

- $(\operatorname{senh}^{-1} u)' = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} D_x u$
- $(\cosh^{-1} u)' = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} D_x u$ ($u > 1$)
- $(\tanh^{-1} u)' = \frac{1}{1-u^2} D_x u$ ($|u| < 1$)
- $(\coth^{-1} u)' = \frac{1}{1-u^2} D_x u$ ($|u| > 1$)
- $(\operatorname{sech}^{-1} u)' = \frac{1}{u\sqrt{1-u^2}} D_x u$ [$u \in (0,1)$]

- $(\text{csch}^{-1} u)' = \dfrac{1}{|u|\sqrt{1+u^2}} D_x u$ (u ≠ 0)

5.24 Integración de Funciones Hiperbólicas Inversas

- $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2+1}} = senh^{-1}u + C = \ln(u+\sqrt{u^2+1}) + C$
- $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \cosh^{-1} u + C = \ln(u+\sqrt{u^2-1}) + C$
- $\int \dfrac{du}{1-u^2} = \begin{cases} \tanh^{-1} u + C; \text{ si } |u| < 1 \\ \coth^{-1} u + C; \text{ si } |u| > 1 \\ \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+u}{1-u}\right| + C; \text{ si } u \neq 1 \end{cases}$
- $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = senh^{-1}\dfrac{u}{a} + C$
- $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \cosh^{-1}\dfrac{u}{a} + C$
- $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\tanh^{-1}|\dfrac{u}{a}| + C; \ \forall\ |u| < a \\ \dfrac{1}{a}\coth^{-1}|\dfrac{u}{a}| + C; \ \forall\ |u| > a \\ \dfrac{1}{2a}\ln|\dfrac{a+u}{a-u}| + C; \ \forall\ u \neq a;\ a \neq 0 \end{cases}$
- Ejemplo:
  - Calcular $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}$

    $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}} = \int \dfrac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+4}}$ →

    u = x – 3 = 2 senh u ; dx = 2 cosh x u du

    $= \int \dfrac{2\cosh u du}{\sqrt{4senh^2 u + 4}} = \int \dfrac{2\cosh u du}{2\sqrt{senh^2 u + 1}} = \int \dfrac{\cosh u du}{\sqrt{\cosh^2 u}} = \int \dfrac{\cosh u du}{\cosh u} = \int u du = u + C =$

    $= senh^{-1}\left(\dfrac{x-3}{2}\right) + C$

6 Técnicas de Integración

6.1 Integración por sustitución

- El papel de la sustitución es comparable al de la Regla de la Cadena en la derivación.
- Se busca identificar parte de la función y reemplazarla por "u", y se trabaja reemplazando todas las funciones de "x" por funciones de "u".
- Una vez integrado, se regresan las funciones a "x".
- Ejemplo:
  - Sea $\int (x^2+1)^2 2xdx$
  - $u = (x^2+1); du = 2xdx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{2x}$
  - $\int (x^2+1)^2 2xdx = \int (u)^2 2x \dfrac{du}{2x} = \int (u)^2 du = \dfrac{u^3}{3} + C = \dfrac{(x^2+1)^3}{3} + C$
- **Ejercicios:**
  - $\int 5\cos 5xdx$
    - $u = 5x; du = 5dx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{5}$
    - $\int 5\cos 5xdx = \int 5\cos u \dfrac{du}{5} = \int \cos udu = sen5x + C$
  - $\int \sqrt{2x-1}dx$
    - $u = 2x-1; du = 2dx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{2}$
    - $\int \sqrt{2x-1}dx = \int \sqrt{u}\dfrac{du}{2} = \dfrac{1}{2}\int u^{1/2}du = \dfrac{1}{2}\dfrac{2}{3}u^{3/2} + C = \dfrac{1}{3}(2x-1)^{3/2} + C$
  - $\int sen^2 3x\cos 3xdx$
    - $u = sen3x; du = 3\cos 3xdx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{3\cos 3x}$
    - $\int sen^2 3x\cos 3xdx = \int u^2 \cos 3x \dfrac{du}{3\cos 3x} = \dfrac{1}{3}\int u^2 du = \dfrac{1}{9}u^3 + C = \dfrac{1}{9}sen^3 3x + C$

6.2 Integración por partes.

- d(uv) = u dv + v du
- u dv = d(uv) – v du
- Al integrar ambos lados: $\int udv = uv - \int vdu$
- Ejemplo:
  - $\int x \ln x dx$

    u = ln x; dv = x dx

    du = $\frac{1}{x}$dx ; v = $\frac{x^2}{2}$

    Reemplazamos:

    $$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx \Rightarrow \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx \Rightarrow$$

    $$\int x \ln x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$
- Ejercicios:
  - $\int x.senxdx$
  - $\int x^2 e^x dx$
  - $\int \tan^{-1} xdx$
  - $\int e^x senxdx$
  - $\int \sec^3 xdx$

6.3 Integración por Sustitución Trigonométrica.

- Si el Integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{a^2 + u^2}$, o $\sqrt{u^2 - a^2}$, donde a > 0, **<u>A MENUDO</u>** es posible realizar la integración mediante una sustitución trigonométrica. Por ello se verán tres (03) casos:
- Caso 1 ($\sqrt{a^2 - u^2}$ para a > 0):

- Se introduce la variable θ y hacemos:
  - u = a sen θ $\begin{cases} \theta \in [\,0,\ \tfrac{1}{2}\pi\,] \text{ si } u \geq 0, \\ \theta \in [\,-\tfrac{1}{2}\pi\,,\ 0\,) \text{ si } u < 0 \end{cases}$
- Entonces, du = a cos θ dθ
- $\sqrt{a^2 - u^2} = \sqrt{a^2 - a^2 sen^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - sen^2\theta)} = a \cos \theta$
- Por Trigonometría: $\theta = sen^{-1}\dfrac{u}{a}$
- Ejemplo:
  - Calcular $\int \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}dx$

    x = 3 sen θ ; dx = u = 3 cos θ dθ

    $\sqrt{3^2 - x^2} = \sqrt{3^2 - 3^2 sen^2\theta} = 3\cos \theta$

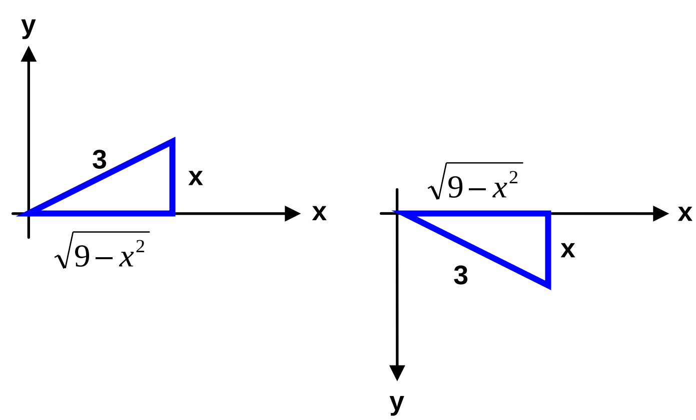
    Por lo tanto:

    $$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}dx = \int \frac{3\cos\theta}{9sen^2\theta}3\cos\theta d\theta \Rightarrow \int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}dx = \int \cot^2\theta d\theta$$

    $$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}dx = \int \left(\csc^2\theta - 1\right)d\theta \Rightarrow \int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}dx = \cot\theta - \theta + C$$

    Como x = 3 sen θ → sen θ = $\frac{1}{3}$**x** → θ = $sen^{-1}\ \frac{1}{3}$ x

    Para hallar cot θ, graficamos (Trigonometría):



$$\cot\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - sen^{-1}\frac{1}{3}x + C$$

- Caso 2 ($\sqrt{a^2+u^2}$ para a > 0):
  - Hacemos u = a tan θ $\begin{cases} \theta \in [\,0,\ \frac{1}{2}\pi\,) \text{ si } u \geq 0, \\ \theta \in (\,-\frac{1}{2}\pi\,,\ 0\,) \text{ si } u < 0 \end{cases}$
  - Entonces du = a $\sec^2\theta\, d\theta$
  - $\sqrt{a^2+u^2} = \sqrt{a^2+a^2\tan^2\theta} = a\sqrt{1+\tan^2\theta} = a\ \sec\ \theta$
  - Por Trigonometría: $\theta = \tan^{-1}\frac{u}{a}$
  - Ejemplo:
    - Calcular $\int\left(\sqrt{x^2+5}\right)dx$

x = $\sqrt{5}$ tan θ; dx = $\sqrt{5}$ $\sec^2\theta\, d\theta$

$$\sqrt{x^2+5} = \sqrt{\left(\sqrt{5}\tan\theta\right)^2+5} = \sqrt{5}\ \sec\ \theta$$

Por tanto:

$\int\left(\sqrt{x^2+5}\right)dx = \int\sqrt{5}\ \sec\ \theta\left(\sqrt{5}\ \sec^2\theta\ d\theta\right) = 5\int\sec^3\theta\ d\theta$ (De acuerdo al ejercicio $\int\sec^3 x dx$ realizado en la sección anterior):

$$\int\left(\sqrt{x^2+5}\right)dx = \frac{5}{2}\sec\ \theta\ \tan\ \theta + \frac{5}{2}\ln\left|\ \sec\ \theta\tan\ \theta\ \right| + C$$

Por Trigonometría: $\sec\ \theta = \frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}$; $\tan\ \theta = \frac{x}{\sqrt{5}}$

$$\int\left(\sqrt{x^2+5}\right)dx = \frac{5}{2}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}\right)}{\sqrt{5}}\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{5}{2}\ln\left|\ \frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}} + \frac{x}{\sqrt{5}}\ \right| + C$$

$$\int\left(\sqrt{x^2+5}\right)dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+5}+\frac{5}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+5}+x\right|+C_1$$

- Caso 3 ($\sqrt{u^2-a^2}$ para a > 0):
  - Hacemos u = a sec θ $\begin{cases} \theta \in [\,0, \tfrac{1}{2}\pi\,) \text{ si } u \geq a, \\ \theta \in [\,\pi, \tfrac{3}{2}\pi\,) \text{ si } u \leq -a \end{cases}$
  - Entonces du = a sec θ tan θ dθ
  - $\sqrt{u^2-a^2}=\sqrt{a^2\sec^2\theta-a^2}=a\sqrt{(\sec^2\theta-1)}=a\ \tan\ \theta$
  - θ = $\begin{cases} \sec^{-1}\frac{u}{a}, & \text{si } u \geq a, \\ 2\pi-\sec^{-1}\frac{u}{a}, & \text{si } u \leq -a \end{cases}$
  - Ejemplo:
    - Evaluar $\int\frac{dx}{x^3\left(\sqrt{x^2-9}\right)}$

x = 3 sec θ ; dx = 3 sec θ tan θ dθ

$$\sqrt{x^2-9}=\sqrt{9\sec^2\theta-9}=3\tan\ \theta$$

$$\int\frac{dx}{x^3\left(\sqrt{x^2-9}\right)}=\int\frac{3\sec\theta\tan\theta d\theta}{27\sec^3\theta 3\tan\theta}=\frac{1}{27}\int\cos^2\theta d\theta$$

$$\int\frac{dx}{x^3\left(\sqrt{x^2-9}\right)}=\frac{1}{54}\int(1+\cos 2\theta)d\theta=\frac{1}{54}\left(\theta+\frac{1}{2}sen2\theta\right)+C$$

$$\int\frac{dx}{x^3\left(\sqrt{x^2-9}\right)}=\frac{1}{54}(\theta+sen\theta\cos\theta)+C$$

Por Trigonometría, sen θ = $\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$ y cos θ = $\frac{3}{x}$

$$\int\frac{dx}{x^3\left(\sqrt{x^2-9}\right)}=\frac{1}{54}\left(\sec^{-1}\frac{x}{3}+\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\frac{3}{x}\right)+C\text{; } x \geq 3$$

$$= \frac{1}{54}\left(2\pi - \sec^{-1}\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\frac{3}{x}\right) + C_1 \text{; x ≤ 3}$$

- Ejercicios:
  - Determinar $\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2-25}\right)}$
  - Determinar $\int_1^2 \frac{dx}{\left(6-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

6.4 Integración de Funciones Racionales.

- Una Función Racional es aquella que se puede expresar como el cociente de dos funciones Polinomiales:
  - $H(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde P(x) y Q(x) son Polinomios.
- Para integrar $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, donde el grado de P(x) es menor que el de Q(x) suele ser necesario escribir $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como la suma de las fracciones parciales.
- Para ello se factoriza Q(x), de acuerdo a los siguientes casos:
  - Caso 1 (Factores de Q(x) lineales y no se repiten):
    - $Q(x) = (a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2) \dots (a_n x + b_n)$
    - $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \dots + \frac{An}{a_nx+b_n}$
    - Ejemplo: Calcular $\int \frac{(x-1)}{x^3-x^2-2x}dx$

      Factorizamos el denominador:

      $$\frac{(x-1)}{x^3-x^2-2x} = \frac{(x-1)}{x(x-2)(x+1)} \Rightarrow \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

      $\forall$ x ≠ 0, x ≠ 2, x ≠ -1

      x-1 = A (x-2)(x+1) + B x (x+1) + C x (x-2)

Tomando x = 0:

-1 = - 2 A → A = ½

Tomando x = 2

1 = 6 B → B = 1/6

Tomando x = -1

-2 = 3 C → C = - 2/3

Sustituyendo A, B y C:

$$\frac{(x-1)}{x^3-x^2-2x}=\frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{\frac{1}{6}}{x-2}-\frac{\frac{2}{3}}{x+1}$$

Entonces:

$$\int\frac{(x-1)}{x^3-x^2-2x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+1}$$

$= \frac{1}{2}$ ln | x | + $\frac{1}{6}$ ln | x-2 | - $\frac{2}{3}$ ln | x+1 | + $\frac{1}{6}$ ln C

$= \frac{1}{6}$ (3 ln | x | + ln | x-2 | - 4 ln | x+1 | + ln C)

$= \frac{1}{6}$ ln $\left|\frac{Cx^3(x-2)}{(x+1)^4}\right|$

- Caso 2 (Factores de Q(x) lineales y algunos se repiten)
  - (a_i x + b_i) se repite p veces.
    - $$\frac{A_1}{(a_ix+b_i)^p}+\frac{A_2}{(a_ix+b_i)^{p-1}}+\ldots+\frac{A_p}{(a_ix+b_i)}$$
  - Ejemplo: Hallar $\int\frac{(x^3-1)}{x^2(x-2)^3}dx$

$$\frac{(x^3-1)}{x^2(x-2)^3}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{(x-2)^3}+\frac{D}{(x-2)^2}+\frac{E}{x-2}$$

∀ x ≠ 2, x ≠ 0

x^3-1 = A(x-2)^3 + Bx (x-2)^3 + Cx^2 + Dx^2 (x-2) + Ex^2 (x-2)^2

Tomando x = 2 → 7 = 4 C → C = 7/4

Tomando x = 0 → -1 = 8 A → A = 1/8

Sustituimos A y C:

$x^3-1 = \frac{1}{8}(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + B\,x\,(x^3 - 6x^2 + 12\,x - 8) + \frac{7}{4}x^2 +$

$+ D\,x^3 - 2\,D\,x^2 + E\,x^2\,(x^2 - 4x + 4)$

$x^3-1 = (B+E)\,x^4 + (\frac{1}{8} - 6B + D - 4E)x^3 + (-\frac{3}{4} + 12\,B + \frac{7}{4} -$

$-2\,D + 4\,E)\,x^2 + (\frac{3}{2} - 8\,B)\,x - 1$

Igualando coeficientes iguales de x:

$$\left.\begin{array}{l} B + E = 0 \\ \frac{1}{8} - 6\,B + D - 4\,E = 1 \\ -\frac{3}{4} + 12\,B + \frac{7}{4} - 2\,D + 4\,E = 0 \\ \frac{3}{2} - 8\,B = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} B = \frac{3}{16} \\ D = \frac{5}{4} \\ E = -\frac{3}{16} \end{array}$$

$$\frac{(x^3-1)}{x^2(x-2)^3} = \frac{\frac{1}{8}}{x^2} + \frac{\frac{3}{16}}{x} + \frac{\frac{7}{4}}{(x-2)^3} + \frac{\frac{5}{4}}{(x-2)^2} + \frac{-\frac{3}{16}}{x-2}$$

$$\int \frac{(x^3-1)}{x^2(x-2)^3} = \frac{1}{8}\int\frac{dx}{x^2} + \frac{3}{16}\int\frac{dx}{x} + \frac{7}{4}\int\frac{dx}{(x-2)^3} + \frac{5}{4}\int\frac{dx}{(x-2)^2} - \frac{3}{16}\int\frac{dx}{x-2}$$

$$\int \frac{(x^3-1)}{x^2(x-2)^3} = -\frac{1}{8} + \frac{3}{16}\ln x - \frac{7}{8(x-2)^2} - \frac{5}{4(x-2)} - \frac{3}{16}\ln\left|\,x-2\,\right| + C$$

$$\int \frac{(x^3-1)}{x^2(x-2)^3} = \frac{-11x^2 + 17x - 4}{8x(x-2)^2} + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right| + C$$

- Ejercicio: Hallar $\int \frac{du}{u^2 - a^2}$
- De allí podemos precisar como fórmulas:
  - $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$
  - $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C$

6.5 Integración por Funciones Racionales de Seno y Coseno.

- Si un integrando es una función Racional de sen x y cos x, se puede reducir a una Función Racional de z por medio de la sustitución
  - z = tan ½ x
- Así:
  - cos x = $\frac{1-z^2}{1+z^2}$
  - sen x = $\frac{2z}{1+z^2}$
- Como z = tan ½ x, dz = ½ sec^2 ½ x dx → dz = ½ (1 + tan^2 ½ x)dx → dx = $\frac{2dz}{1+z^2}$
- Ejemplo: Calcular $\int \frac{dx}{1 - sen\ x + \cos\ x}$

z = tan ½ x; dx = $\frac{2dz}{1+z^2}$

$$\int \frac{dx}{1 - sen\ x + \cos\ x} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1 - \frac{2z}{1+z^2} + \frac{1-z^2}{1+z^2}} = 2\int \frac{dz}{(1+z^2) - 2z + (1-z^2)} =$$

$$\int \frac{dx}{1 - sen\ x + \cos\ x} = 2\int \frac{dz}{2-2z} = \int \frac{dz}{1-z} = -\ln \left| 1-z \right| + C = -\ln \left| 1 - \tan \frac{1}{2} x \right| + C$$

- Ejercicio: Calcular $\int \sec\ x\ dx$

6.6 Resumen de Procedimientos para resolver Integrales

6.6.1 Integración por Partes

- Identificar "u" y "dv".
- Derivar "u" e Integrar "dv".
- Aplicar la fórmula de Integración por Partes.
- Aplicar nuevamente hasta resolver.

6.6.2 Integración por Sustitución Trigonométrica:

- Identificar "x" y "dx" de acuerdo a los 3 casos existentes
- Sustituir las "x" y "dx" por las variables identificadas
- Aplicar factor común a la cantidad subradical
- Aplicar Identidades Trigonométricas en la cantidad subradical
- Aplicar radicación
- Resolver la Integral
- Devolver las variables a "x".

6.7 Ejercicios

6.7.1 Aplique la Técnica de Sustitución para resolver las siguientes Integrales:

1. $\int \sqrt{1-4y}\,dy$
2. $\int x^2 (x^3-1)^{10}\,dx$
3. $\int (x^2-4x+4)^{4/3}\,dx$
4. $\int x\sqrt{x+2}\,dx$

6.7.2 Aplique la Técnica de Integración por Partes en las siguientes Integrales:

1. $\int x^2 \ln x dx$
2. $\int x^2 senx dx$
3. $\int x \sec^2 x dx$
4. $\int \sec^3 dx$

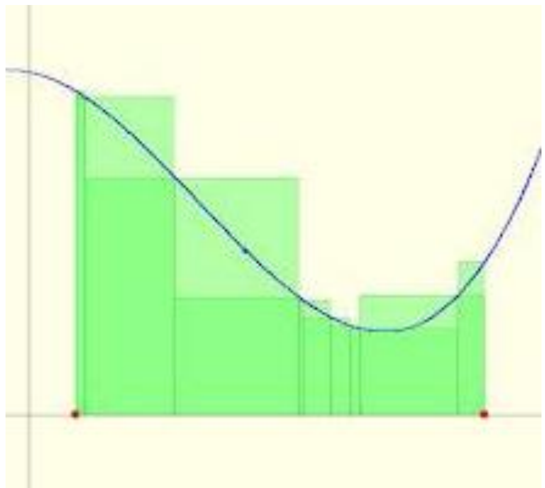
6.7.3 Aplique la Técnica de Integración por Sustitución Trigonométrica para resolver las siguientes Integrales:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

3. $\int \sqrt{25 + x^2}\, dx$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}}$

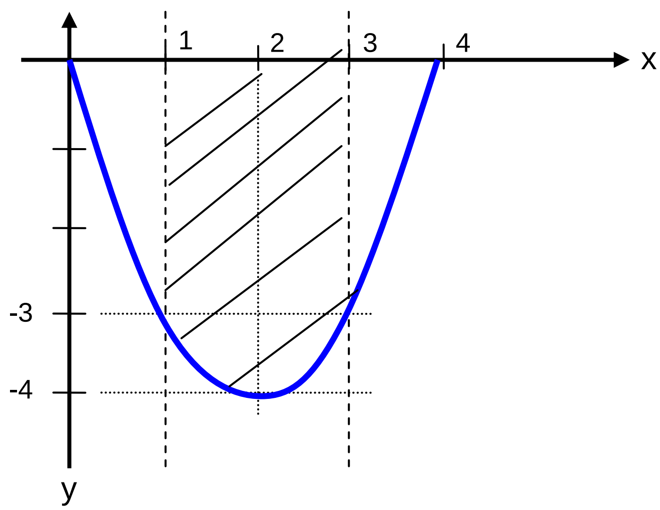
5. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 36}}$



7 Aplicaciones de las Integrales Definidas

7.1 Área de una Región en un Plano.

- $A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta_i x = \int_a^b f(x)dx$ (Integral de Reimann)
- Ejemplo:
  - Determine el área de la región limitada por la curva y = x2 – 4x, el eje x y las rectas x=1 y x=3.



x	y
0	O
1	-3
2	-4
3	-3
4	0

Como y<0 en el intervalo [1,3], $A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [-f(\varepsilon_i)\Delta_i x] = -\int_a^b f(x)dx$

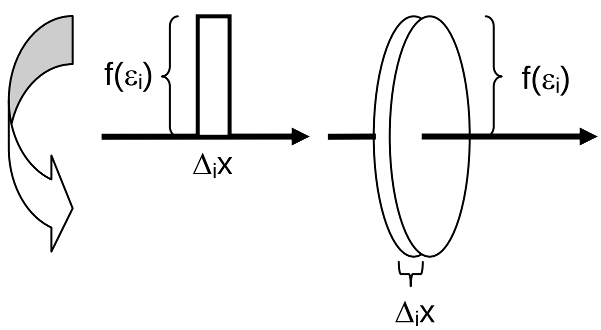
$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} -\left(\varepsilon_i^{\ 2} - 4\varepsilon_i\right)\Delta_i x = A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(-\varepsilon_i^{\ 2} + 4\varepsilon_i\right)\Delta_i x =$$

$$A = \int_1^3 \left(4x - x^2\right)dx = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \Big|_1^3 = \frac{22}{3}$$

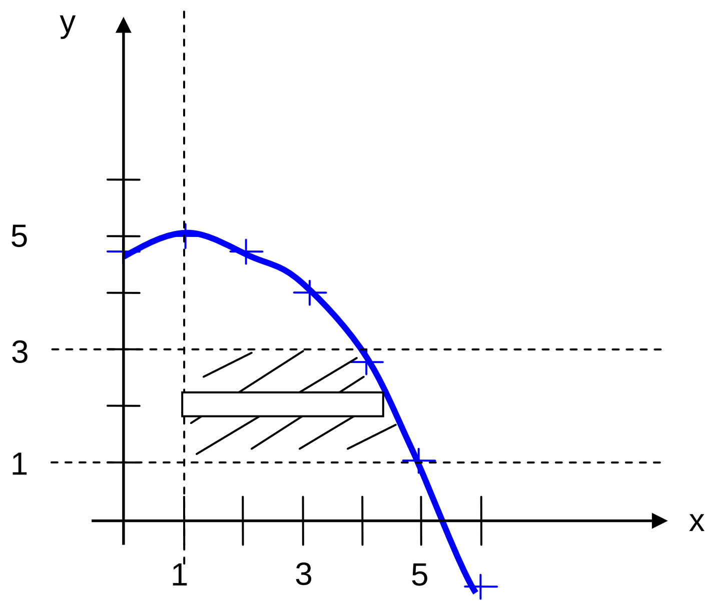
- Ejercicios:
  - Determine el área de las regiones limitadas por:
    - $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, eje x, x = -1, x = 2.
    - $y = x^2$, $y = -x^2 + 4x$
    - $y^2 = 2x - 2$, $y = x - 5$
    - $y = x^3 - 6x^2 + 8x$, $y = x^2 - 4x$

7.2 Volumen de Sólido de Revolución

- Sólido de Revolución es un sólido que se obtiene al girar una región en un plano alrededor de una recta en el plano (eje de revolución).
- En figuras en un plano (2 dimensiones) podemos hablar de rectángulos sucesivos (sub intervalos) para determinar el área.
- Cuando tomamos esos rectángulos y los giramos alrededor del eje x, se forma un disco circular en forma de cilindro circular recto, cuya base tendrá un radio de $f(\varepsilon_i)$ y una altura de $\Delta_i x$. El volumen de dicho disco es:
  - $\Delta_i V = \pi\, [f(\varepsilon_i)]^2\, \Delta_i x$
- Como hay n rectángulos, también habrá n discos circulares, y la suma de los volúmenes de los discos viene dado por:
  - $\sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} \pi \left[f(\varepsilon_i) \right]^2 \Delta_i x$ (Suma de Reimann)
- Sea f continua en [a, b], y si suponemos que $f(x) \geq 0\ \forall\ x \in [a, b]$. Si S es el sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje x la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas x = a y x = b, y si V es el volumen de S en unidades cúbicas, entonces:
  - $V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi \left[f(\varepsilon_i) \right]^2 \Delta_i x = \pi \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx$



- Ejemplo:
  - Calcule el Volumen del sólido generado al girar, alrededor de la recta x = 1, la región limitada por la curva $(x - 1)^2 = 20 - 4y$ y las rectas x = 1, y = 1, y = 3.



x	y
0	19/4
1	5
2	19/4
3	4
4	11/4
5	1
6	-5/4

$$y = \frac{20-(x-1)}{4} \Rightarrow g(y) = \sqrt{20-4y} + 1, \; y \in [\,1, 3\,]$$

$\Delta_i V = \pi\, [g(\varepsilon_i)-1]^2\, \Delta_i y \rightarrow \Delta_i V = \pi\, [(\sqrt{20-4\varepsilon_i}+1) -1]^2\, \Delta_i y \rightarrow$

$\Delta_i V = \pi\, [(\sqrt{20-4\varepsilon_i}\,)]^2\, \Delta_i y \rightarrow \Delta_i V = \pi\, (20 - 4\varepsilon_i)\, \Delta_i y \rightarrow$

$$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi(20-4\varepsilon_i)\Delta_i y \Rightarrow V = \pi\int_1^3 (20-4\varepsilon_i)dy \Rightarrow$$

$$V = \pi\left(20y-2y^2\right)\Big|_1^3 \Rightarrow V = \pi[(60-18)-(20-2)] \Rightarrow V = 24\pi$$

- Sean las funciones f y g continuas en el intervalo [a, b] y sean $f(x) \geq g(x) \geq 0 \; \forall \; x \in [\,a, b\,]$, entonces, el volumen del sólido de revolución generado al girar, alrededor del eje x, en la región limitada por las curvas y = f(x) y y = g(x), las rectas x = a y x = b, será:
  - $V = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi\left\{[f(\varepsilon_i)]^2 - [g(\varepsilon_i)]^2\right\}\Delta_i x = \pi\int_a^b \left\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\right\}dx$

- Ejemplo:
  - Determine el volumen del sólido que se genera al girar, alrededor del eje x, la región acotada por la parábola $y = x^2 + 1$ y la recta $y = x + 3$.

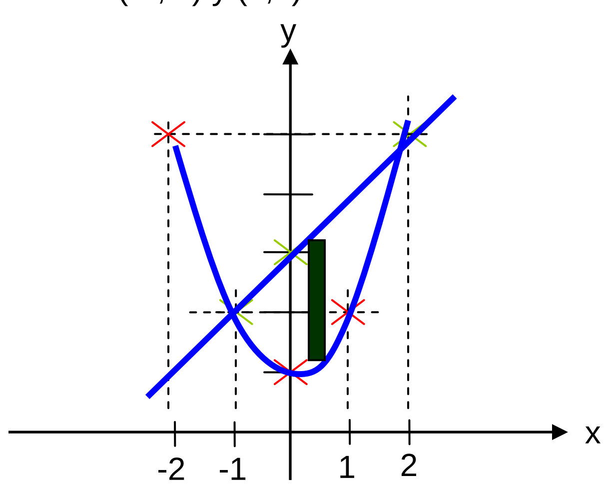
$f(x) = x + 3$	
x	**y**
-1	2
0	3
2	5

$g(x) = x^2 + 1$	
x	**Y**
-2	5
-1	2
0	1
1	2
2	5

Los puntos de corte entre ambas funciones se hallan igualándolas:

$x + 3 = x^2 + 1 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x_1 = -1; x_2 = 2$

Puntos de corte: (-1, 2) y (2,5).



$\Delta_i V = \pi \{ [f(\varepsilon_i)]^2 - [g(\varepsilon_i)]^2 \} \Delta_i x$

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi \left\{ [f(\varepsilon_i)]^2 - [g(\varepsilon_i)]^2 \right\} \Delta_i x = \pi \int_a^b \left\{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right\} dx$$

$$V=\pi\int_{-1}^{2}\left\{[f(x)]^2-[g(x)]^2\right\}dx \Rightarrow V=\pi\int_{-1}^{2}\left[(x+3)^2-(x^2+1)^2\right]dx$$

$$V=\pi\int_{-1}^{2}\left(-x^4-x^2+6x+8\right)dx \Rightarrow V=\pi\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+3x^2+8x\right)\Big|_{-1}^{2}$$

$$V=\pi\left[\left(-\frac{32}{5}-\frac{8}{3}+12+16\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+3-8\right)\right] \Rightarrow V=\frac{117}{5}\pi$$

- Ejercicio:
  - Calcule el volumen del sólido generado al girar, alrededor de la recta x = -4, la región acotada por las parábolas $x = y - y^2$ y $x = y^2 - 3$.

7.3 Trabajo Mecánico

- El Trabajo Mecánico realizado por una Fuerza que actúa sobre un objeto, se define en Física como "Fuerza por Desplazamiento".
  - W = F . (b – a)
  - (W: Trabajo; F: Fuerza; b – a: distancia entre a y b).
- Ejemplo:
  - ¿Cuánto es el trabajo requerido para levantar un peso de 70 Kgr, a 3 mts de altura?

  W = 70 Nw (Kgr.mt) . 3 mts → W = 210 Joules ($Kgr.mt^2$)
- Sea la función *f* continua en [a, b] y sea *f*(x) el número de unidades de la Fuerza que actúa sobre un objeto en el punto x, sobre el eje x. Entonces, si W es el trabajo efectuado por la Fuerza cuando el objeto se mueve de a *a* b, entonces:
  - $$W=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta_i x=\int_a^b f(x)dx$$
- Ejercicios:
  - Una partícula se mueve a lo largo del eje x por la acción de una fuerza de *f*(x) Newtons, cuando la partícula está a x

metros del origen. Si $f(x) = x^2 + 4$, halle el trabajo para que la partícula se desplace desde x = 2 hasta x = 4.

- Un resorte tiene una longitud natural de 14 cm. Si se requiere de una fuerza de 50 Dinas para mantener el resorte estirado 2 cm., ¿cuánto Trabajo se realiza al estirar el resorte desde su longitud hasta los 18 cm.? (Ley de Hooke → $f(x) = k.x$)
- Conforme un tanque de agua es levantado, el agua se descarga a una razón constante de 2 mt^3 por cada metro de altura. Si el peso del tanque es de 200 Newtons y tiene 1.000 m^3 de agua, encuentre el Trabajo realizado al levantar el tanque 20 mt.

7.4 Centro de Masa

- Recordemos el Teorema de Valor Medio para Integrales:
  - $$VP\left(\overline{\overline{X}}\right) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$
- Con Masa es la razón entre la Fuerza y la Aceleración de una partícula (F = m.a).
  - Fuerza: Newton / Dina
  - Masa: Kgr / gr
  - Aceleración: mt/seg^2 ó cm/seg^2 ($9{,}81\ mt/seg^2$)
- Considérese una barra horizontal, de peso y espesor despreciables (→ - ∞), sobre el eje x. Sobre la barra hay n partículas ubicadas en los puntos x_1, x_2, …, x_i, …, x_n. La i-ésima partícula está a x_i mt del origen y tiene una masa de m_i Kgr. La masa total del sistema sería entonces: $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$

- El Momento de Masa se define como la suma de los Momentos de Masa de todas las partículas (Número de Kgr.mts o Newtons con respecto al origen): $M = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$
- Deseamos encontrar un punto x̄ tal que si la Masa Total del Sistema está allí, sea:
  - $\bar{x} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$
  - $\bar{x} \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$
- Dicha x̄ se denomina Centro de Masa del Sistema, y es el punto donde dicho Sistema está equilibrado.
- Es importante el concepto de Centro de Masa, porque su comportamiento puede describir el comportamiento del sistema completo.
- En una barra homogénea (densidad lineal constante), se aplica la fórmula enunciada.
- Ejemplo:
  - Dadas cuatro partículas de masas 2, 3, 1 y 5 Kgr., ubicadas sobre el eje x, cuyas coordenadas son 5, 2, -3 y -4. Halle el Centro de Masa del Sistema.

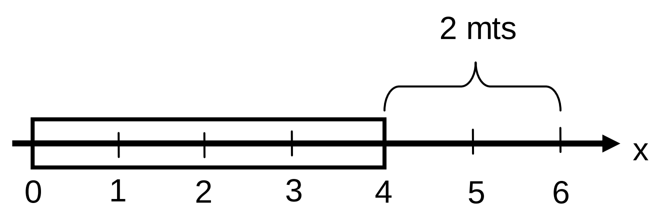
    $\bar{x} = \frac{2(5)+3(2)+1(-3)+5(-4)}{2+3+1+5} \rightarrow \bar{x} = -\frac{7}{11}$

    El Centro de Masa está a $\frac{7}{11}$ unidades a la izquierda del origen.
- Si la barra no es homogénea, su densidad varía a lo largo de la barra. Sea L la longitud total de la barra, y p(x) la densidad lineal en cualquier punto x de la barra, donde p es continua en [0, L]. Para

hallar la masa total de la barra, consideremos una partición Δ del intervalo [0, L], en n sub-intervalos. La masa total de la barra viene dada por:

- $M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} p(\varepsilon_i)\Delta_i x = \int_0^L p(x)dx$
- Densidad = Kgr / mt

- El Momento de Masa de la barra no homogénea es:
  - $M = \int_0^L xp(x)dx$
- Y el Centro de Masa es:
  - $\bar{x} = \dfrac{\int_0^L xp(x)dx}{\int_0^L p(x)dx}$
- Ejemplo:
  - Halle el Centro de Masa de una barra de 4 mts de largo, en la cual la densidad varía directamente con la distancia del punto a un punto exterior en la recta de la barra, y a 2 mt del extremo, donde la densidad es de 5 Kg/mt.



p(x) = c (6 – x), donde c es una constante de proporcionalidad.

Si p(4) = 5 → 5 = 2c → c = $\frac{5}{2}$ → p(x) = $\frac{5}{2}$ (6 – x)

$$M=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{5}{2}(6-\varepsilon_i)\Delta_i x \Rightarrow M=\int_0^4 \frac{5}{2}(6-x)dx \Rightarrow$$

$$M=\frac{5}{2}\left(6x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^4 \Rightarrow M=40$$

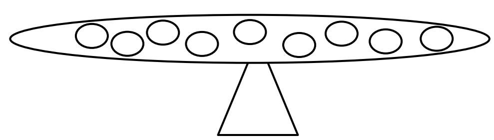
$$\bar{x}=\frac{\int_0^4 \frac{5}{2}x(6-x)dx}{40} \Rightarrow \bar{x}=\frac{1}{16}\left(3x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^4 \Rightarrow \bar{x}=\frac{5}{3}$$

El Centro de Masa está a $\frac{5}{3}$ unidades del extremo cuya densidad es mayor.

- Ejercicio:
  - Si una barra es de densidad uniforme k (constante). Halle el Centro de Masa.

7.5 Centroide de una Región Plana

- El Centroide de una región plana es el Centro de Masa de un sistema de n partículas en una placa de peso y espesor despreciables, y es el punto donde dicha placa se equilibra.



- Para hallar el Centroide, se debe hallar un punto (x,y) en el plano.

$$M_x=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}[f(\gamma_i)]^2\Delta_i x \Rightarrow M_x=\frac{1}{2}\int_a^b [f(x)]^2 dx$$

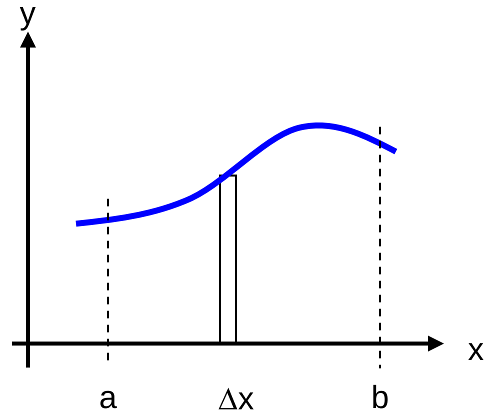
$$M_y=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i[f(\gamma_i)]^2\Delta_i x \Rightarrow M_y=\int_a^b xf(x)dx$$

$$\text{Centroide} \rightarrow \left(\frac{M_x}{A}, \frac{M_y}{A}\right)$$

7.6 Centroide de un Sólido de Revolución

- Para hallar el Centro de Masa de un sólido, se emplea la Integración múltiple.
- Sin embargo, si la forma del sólido es la de un sólido de revolución, y su densidad de volumen es constante, se puede hallar de manera similar al Centro de un Plano.

- El siguiente procedimiento permite hallar el Centro de Masa de un Sólido de Revolución Homogéneo, con la suposición de que dicho Centro de Masa está sobre el Eje de Revolución.
- Consideremos un sistema de Coordenadas en tres dimensiones: los ejes x *y* y en dos dimensiones, y el eje z perpendicular al origen (tercer eje). Un punto en tres dimensiones se denota por (x, y, z).
    - El plano que contiene a los ejes x *y* y, se llama plano xy.
    - El plano que contiene a los ejes x *y* z, se llama plano xz.
    - El plano que contiene a los ejes y *y* z, se llama plano yz.
- Sea f una función continua en [a, b] y sea $f(x) \geq 0 \ \forall \ x \in [a, b]$. R es la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x, y las rectas x = a y x = b.
- Sea S el Sólido de Revolución Homogéneo cuya densidad de Volumen es k Kg/m^3, donde k es constante, y se genera al girar la región R alrededor del Eje X.
- Tomemos una partición Δ del intervalo [a, b] y representemos el i-ésimo subintervalo por $[x_{i-1}, x_i]$ (para i = 1, 2, 3, …, n).
- Sea y_i el punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$.
- Formemos n rectángulos con alturas $f(\gamma_i)$ y bases cuyo ancho sea $\Delta_i x$. m



- Si cada uno de los n rectángulos se gira alrededor del eje x, se generan n discos circulares. El i-ésimo rectángulo genera un disco circular que tiene un radio de $f(\gamma_i)$.m y un espesor de $\Delta_i x$.m
    - Su volumen es $\pi\ [f(\gamma_i)]^2\ \Delta_i x\ .\ m^3$
    - Su masa es $k\ \pi\ [f(\gamma_i)]^2\ \Delta_i x$
- El Centro de Masa del disco circular se encuentra sobre el Eje de Revolución en el centro del Disco (γ_i, 0 , 0).
- El Momento de Masa del Disco, con respecto al plano yz, es
    - $\Delta i\ M_{yz} = \gamma_i\ \{ k\ \pi\ [f(\gamma_i)]^2\ \Delta_i x \}$
- La suma de las medidas de los Momentos de Masa de los n discos circulares con respecto al plano yz, está dada por la suma de Riemann:
    - $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i\ k\ \pi\ [f(\gamma_i)]^2\ \Delta_i x$
- El límite de esa sumatoria, cuando $||\Delta|| \rightarrow 0$, se define como el Momento de Masa de S con respecto al plano yz:
    - $V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi\ [f(\gamma_i)]^2\ \Delta_i x \rightarrow V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\ dx$
    - (La masa de S se define como k . V)
- La Región R está limitada por la curva y = f(x), el eje x y las rectas x=a y x=b, donde la función f es continua en el intervalo [a, b],

$f(x) \geq 0 \ \forall \ x \in [\ a,\ b\ ]$. El sólido de revolución homogéneo S, cuya densidad de volumen es k (Kg/mt^3), donde k es una constante, que se genera por la rotación de la Región R alrededor del Eje x. El número de Kgr . mt del Momento de Masa de S con respecto al Plano yz se representa por:

- $M_{yz} = \lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i \ k \ \pi \ [f(\gamma_i)]^2 \ \Delta_i x \ \rightarrow M_{yz} = k \ \pi \int_a^b x \ [f(x)]^2 \ dx$

- La masa M (Kgr) del Sólido S se define por:
  - $M = \lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} k \ \pi \ [f(\gamma_i)]^2 \ \Delta_i x \rightarrow M = k \ \pi \int_a^b [f(x)]^2 \ dx$
- El Centro de Masa de S, en $(\bar{x}, 0, 0)$ es:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} \rightarrow \bar{x} = \frac{k \ \pi \int_a^b x \ [f(x)]^2 \ dx}{k \ \pi \int_a^b [f(x)]^2 \ dx}$$

$$\rightarrow \bar{x} = \frac{\int_a^b x \ [f(x)]^2 \ dx}{\int_a^b [f(x)]^2 \ dx}$$

- El Centro de Masa de un Sólido de Revolución Homogéneo es el centroide del Sólido de Revolución
- El Centroide de S también se puede definir como:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{V}$$

- Ejemplo: Hallar el Centroide del Sólido de Revolución que se genera al hacer girar, alrededor del eje x, la región limitada por la curva $y=x^2$, el eje x y la recta x = 3.
  - $M_{yz} = \lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i \ \pi \ [f(\gamma_i)]^2 \ \Delta_i x \rightarrow M_{yz} = \pi \int_a^b x^5 \ dx = \frac{243}{2}\pi$
  - $V = \lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \pi \ [f(\gamma_i)]^2 \ \Delta_i x \rightarrow V = \pi \int_a^b [f(x)]^4 dx = \frac{243}{5}\pi$

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{V}$$

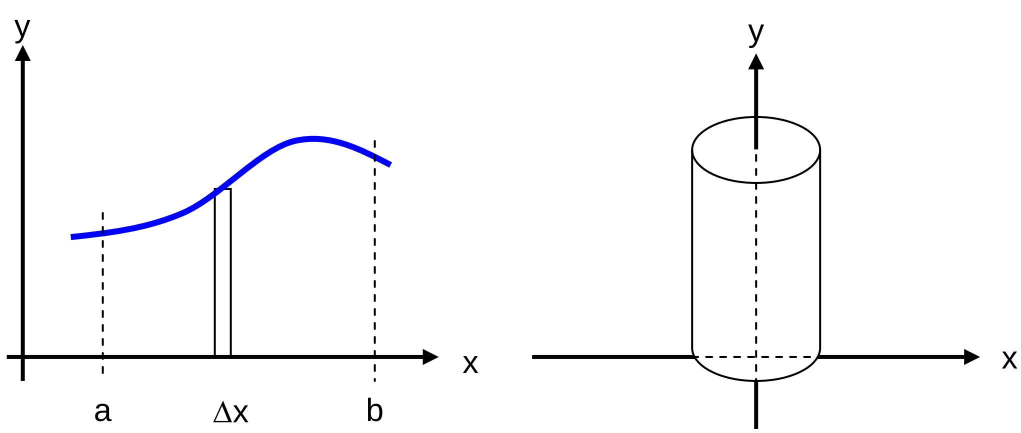
- $\bar{x} = \dfrac{\frac{243}{2}\pi}{\frac{243}{5}\pi} \rightarrow \bar{x} = \dfrac{5}{2}$
- Centroide $\left(\frac{5}{2}, 0, 0\right)$

- Las funciones f y g son continuas en el intervalo [a, b], donde $f(x) \geq g(x) \geq 0 \; \forall \; x \in [a, b]$. Sea R la Región limitada:
  - por arriba → $y = f(x)$
  - por abajo → $y = g(x)$
  - por los lados → $x = a \wedge x = b$
- Los elementos rectangulares de área se consideran perpendiculares al eje x, de manera que el elemento de volumen es un anillo circular.
- El i-ésimo rectángulo tiene un ancho de $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$, y γ_i es el punto medio del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.
- El centroide del anillo circular obtenido por la rotación del elemento rectangular del área, alrededor del eje x, se encuentra en el centro del anillo, que es el punto $(\gamma_i, 0, 0)$. Sea S el sólido de revolución obtenido por la rotación de R alrededor del eje x.
- El Momento M_{yz} de S será:
  - $M_{yz} = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \; \pi \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \} \Delta_i x \;\rightarrow$
  - $M_{yz} = \pi \int_a^b x \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \} \, dx$
- Si V es el Volumen de S,
  - $V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \} \Delta_i x \;\rightarrow$
  - $V = \pi \int_a^b \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \} \, dx$

- Si el Centroide de S se encuentra en el punto ($\bar{x}$, 0, 0) entonces:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{V}$$

- Ejemplo: Obtener el centroide del Sólido de Revolución generado por la rotación, alrededor del eje x, de la región limitada por la curva $y=e^x$ y las rectas $x = 1 \wedge y = 1$.
- El Centroide de un sólido de revolución también se puede obtener por el método de las capas cilíndricas.
- Sea R la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas x=a y x=b, donde la función f es continua en el intervalo [a, b], $f(x) \geq 0$ $\forall$ $x \in$ [a, b]. Sea S el sólido de revolución generado por la rotación de R alrededor del eje y.
- Si los elementos rectangulares se consideran paralelos al eje y, entonces el elemento de Volumen es una capa cilíndrica.
- Sea $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$, la anchura del i-ésimo rectángulo, y sea γ_i el punto medio del intervalo [x_{i-1}, x_i]. El centroide de la capa cilíndrica que se obtiene por la rotación de este rectángulo alrededor del eje y, se encuentra en el centro de la capa cilíndrica, que es el punto (0, ½ $f(\gamma_i)$, 0).



- El Momento M_{xz} de S con respecto al Plano xz se indica por:
  - $M_{xz} = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n}$ ½ $f(\gamma_i)$ $2 \pi \gamma_i f(\gamma_i) \Delta_i x$ →

- $M_{yz} = \pi \int_a^b x\,[f(x)]^2\,dx$

- El volumen V se indica por:
  - $V = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\, \gamma_i\, f(\gamma_i)\, \Delta_i x \rightarrow$
  - $V = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx$

- El Centroide de S se halla en (0, ȳ, 0):

$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{V}$$

- Ejemplo: Sea $f(x) = x^2$, limitados por el eje x, rectas x = 0 y x = 3. Emplear método de capas cilíndricas para encontrar el centroide generado por la rotación de R alrededor del eje y.
  - $M_{xz} = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\gamma_i^{\,2}\, 2\pi\, \gamma_i\, \gamma_i^{\,2}\, \Delta_i x \rightarrow$
  - $M_{xz} = \pi \int_0^3 x^5\, dx \rightarrow M_{xz} = \frac{243}{2}\pi$
  - $V = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\, \gamma_i\, \gamma_i^{\,2}\, \Delta_i x \rightarrow$
  - $V = \pi \int_0^3 x^3\, dx \rightarrow V = \frac{81}{2}\pi$

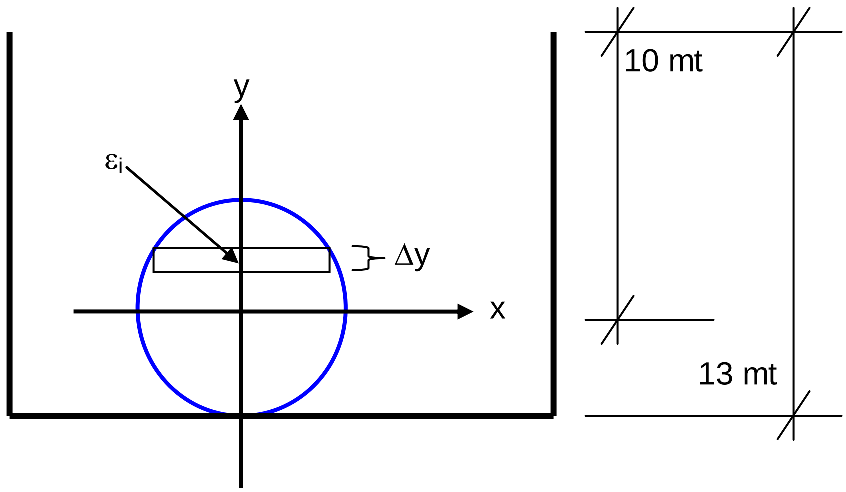
$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{V} \rightarrow \bar{y} = \frac{\frac{243}{2}}{\frac{81}{2}}\pi \rightarrow \bar{y} = 3$$

  - Centroide en (0, 3, 0)

7.7 Presión de un Líquido

- La Integral se puede aplicar para calcular la Fuerza que se origina por la presión de un líquido sobre una placa sumergida en él, o sobre un lado del recipiente que lo contiene.

- Si suponemos que una placa plana se introduce horizontalmente en un líquido que se encuentra en un recipiente. El peso del líquido ejerce una fuerza sobre la placa. La fuerza por unidad cuadrada de área, ejercida por el líquido sobre la placa, se conoce como “Presión del Líquido”.
- Si la masa se mide en Kg, la presión se mide en N / mt^2, y la Fuerza en Newton.
- Si P (N / mt^2) es la presión, h (mt) la profundidad de un punto bajo la superficie del líquido, p_e (Kg / mt^3) su densidad (o peso específico), y g (mt / seg^2) es la aceleración debida a la gravedad (9,81 mt/seg^2), entonces:
    - $P = p_e . h . g$
- Si A (mt2) es el área de una placa plana, sumergida horizontalmente en el líquido, y F (N) es la Fuerza originada por la presión del líquido que actúa sobre la cara superior de la placa, entonces:
    - $F = P . A$
- Sustituimos:
    - $F = (9,81 . p_e . h) . A$
    - $F = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 9,81\, p_e\, \varepsilon_i\, f(\varepsilon_i)\, \Delta_i x \rightarrow F = \int_a^b 9,81\, p_e\, x\, f(x)\, dx$
- (La longitud de la placa x mt bajo la superficie viene dado por $f(x)$ (mt). La densidad o peso específico p_e del agua es de 1.000Kg / m^3. Así que si sabemos que el líquido es agua, p_e = 1.000).
- Ejemplo: un recipiente en forma de cilindro circular recto, que tiene en la base un radio de 3 mt está de lado sobre el fondo de un tanque lleno de agua, cuya profundidad es de 13 mt. Calcular la fuerza total debido a la presión del agua en un extremo del recipiente.



- La ecuación de la circunferencia, es $x^2 + y^2 = 9$. Despejando x, $x = \sqrt{9-y^2}$; $h = 10 - \varepsilon_i$; $p_e = 1.000$
- $F = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 9{,}81\, p_e\, (10 - \varepsilon_i)\sqrt{9-y^2}\, \Delta_i y \rightarrow$
- $F = 19{,}62\, p_e \int_{-3}^{3} (10 - y)\sqrt{9-y^2}\, dy \rightarrow$
- $F = 196.200 \int_{-3}^{3} \sqrt{9-y^2}\, dy - 19.620 \int_{-3}^{3} y\sqrt{9-y^2}\, dy \rightarrow$
- $F = 196.200\, (\frac{9}{2}\pi) + 19.620\left[\frac{1}{3}(9-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-3}^{3} \rightarrow F = 882.900\, \pi$ N

8 Integral Impropia

8.1 Concepto.

- Cuando se habló de la Integral Definida $\int_a^b f(x)dx$, se dijo que f estaba definida en el Intervalo Cerrado [a, b].
- Cuando se considera un Intervalo Infinito de Integración, estaremos hablando de Integrales Impropias.

8.2 Definiciones

- Si f es continua $\forall$ x ≥ a,
  - $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^{+\infty} f(x)dx$, si el límite existe.
- Si f es continua $\forall$ x ≤ b,
  - $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{-\infty}^{b} f(x)dx$, si el límite existe.
- Si f es continua $\forall$ x y c $\in$ R,
  - $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty} \int_c^{b} f(x)dx$, si el límite existe.
  - Normalmente c = 0.
- Si los límites existen, la Integral Impropia es Convergente.
- Si los límites no existen, la Integral Impropia es Divergente.
- Ejemplo:
  - Evaluar $\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2}$, si converge.

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{2} \frac{dx}{(4-x)^2} = \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{4-x}\right]_a^2 = \lim_{a\to-\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4-a}\right) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

- Ejercicios:
  - $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$
  - $\lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} x dx$
  - $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 12}$
  - $\int_{0}^{+\infty} sen\ x\ dx$

8.3 Otras Integrales Impropias

- Si f es continua $\forall$ x en el Intervalo Semiabierto por la Izquierda (a,b] y si $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$, entonces:
  - $\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$, si el límite existe.
  - (Discontinuidad infinita en el Límite Inferior).
- Si f es continua $\forall$ x en el Intervalo Semiabierto por la Derecha [a,b) y si $\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$, entonces:
  - $\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$, si el límite existe.
  - (Discontinuidad infinita en el Límite Superior).
- Si f es continua $\forall$ x en el Intervalo Cerrado [a, b], excepto en c, donde a < c < b, y si $\lim_{x \to c} | f(x) | = \pm\infty$, entonces:
  - $\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta \to 0^+} \int_{c+\delta}^{b} f(x)dx$, si el límite existe.
  - (Discontinuidad infinita en un punto interior del Intervalo de Integración).
- Ejemplos:

- Evaluar $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

  Como $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

  $$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_\varepsilon^4 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(4-2\sqrt{\varepsilon}\right) = 4-0 = 4$$

- Evaluar $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$

  El integrando tiene discontinuidad infinita en x = 1.

  $$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\delta\to 0^+} \int_{1+\delta}^2 \frac{dx}{(x-1)^2} =$$

  $$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[-\frac{1}{(x-1)}\right]_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\delta\to 0^+} \left[-\frac{1}{(x-1)}\right]_{1+\delta}^2 =$$

  $$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right] + \lim_{\delta\to 0^+} \left[-1+\frac{1}{\delta}\right]$$

  La Integral Impropia es Divergente.

- Ejercicios. Evaluar:
  - $\int_0^1 x \ln x \, dx$
  - $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
  - $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$
  - $\int_{-5}^{-3} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-9}}$

8.4 Ejercicios

8.4.1 Evaluar las siguientes Integrales:

1. $\int_{0}^{+\infty} e^{-x} dx$

2. $\int_{-\infty}^{0} x 5^{-x^2} dx$

3. $\int_{0}^{+\infty} x\ e^{-x} dx$

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} x \cosh\ x\ dx$

5. $\int_{5}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$

6. $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{3dx}{x^2+9}$

7. $\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

8. $\int_{1}^{+\infty} \ln\ x\ dx$

8.4.2 Evaluar las siguientes Integrales:

1. $\int_{2}^{4} \frac{dt}{\sqrt{16-t^2}}$

2. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sec\ \theta\ d\theta$

3. $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$

4. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1-sen\ t}$

5. $\int_{0}^{4} \frac{dx}{x^2-2x-3}$

6. $\int_{0}^{+\infty} \ln\ x\ dx$

7. $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^3}$

8. $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

9 Bibliografía

- LARSON, HOSTETLER & EDWARDS: "Cálculo". Ed McGraw Hill.
- LEITHOLD, Louis: "El Cálculo con Geometría Analítica". Ed Harla. México.

Otras publicaciones para complementar:

- BRADLEY & SMITH: "Cálculo de una Variable". Ed Prentice Hall. México.
- EDWARDS & PENNEY: "Cálculo con Geometría Analítica". Editorial Prentice Hall.
- PITA R, Claudio: "Cálculo de una Variable". Editorial Prentice Hall.
- PURCELL & VARBERG: "Cálculo con Geometría Analítica". Editorial Prentice Hall.
- STEWART, James: "Cálculo Diferencial e Integral". Editorial Thomson.

10 Anexos

Algunas Fórmulas de Integrales

$$\int du = u + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int u^n du = \begin{cases} \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C, & \text{si } n \neq -1 \\ \ln|u| + C, & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

$$\int \ln u\,du = u \ln u - u + C$$

$$\int e^u du = e^u + C$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \;;\ \forall\ a \neq 1 \wedge a > 0$$

$$\int sen\,u\,du = -\cos u + C$$

$$\int sen^2 u\,du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}sen\ 2u + C$$

$$\int \cos u\,du = sen\,u + C$$

$$\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}sen\ 2u + C$$

$$\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$$

$$\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$$

$$\int \cot u\,du = \ln|sen\,u| + C$$

$$\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$$

$$\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$$

$$\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$$

$$\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$$

$$\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = sen^{-1} u + C$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} u + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \sec^{-1}|u| + C$$

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C \;;\ \forall\ a \neq 0$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = sen^{-1}\frac{u}{a} + C \;;\ \forall\ a > 0$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C \;;\ \forall\ a > 0$$

$$\int senh\,u\,du = \cosh u + C$$

$$\int \cosh u\,du = senh\,u + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \tanh u + C$$

$$\int \operatorname{csch}^2 u\,du = -\coth u + C$$

$$\int \operatorname{sech} u \tanh u\,du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$\int \operatorname{csch} u \coth u\,du = -\operatorname{csch} u + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = senh^{-1} u + C = \ln(u + \sqrt{u^2+1}) + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \cosh^{-1} u + C = \ln(u + \sqrt{u^2-1}) + C$$

$$\int \frac{du}{1-u^2} = \begin{cases} \tanh^{-1} u + C; & \text{si } |u| < 1 \\ \coth^{-1} u + C; & \text{si } |u| > 1 \\ \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+u}{1-u}\right| + C; & \text{si } u \neq 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = senh^{-1}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{u}{a} + C \;;\ \forall\ a > 0$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\tanh^{-1}\left|\dfrac{u}{a}\right| + C; & \forall\ |u| < a \\ \dfrac{1}{a}\coth^{-1}\left|\dfrac{u}{a}\right| + C; & \forall\ |u| > a \\ \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+u}{a-u}\right| + C; & \forall\ u \neq a;\ a \neq 0 \end{cases}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$\sqrt{a^2-u^2}$ → **u = a sen θ**

$\sqrt{a^2+u^2}$ → **u = a tan θ**

$\sqrt{u^2-a^2}$ → **u = a sec θ**

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \ldots + \frac{An}{a_nx+b_n}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(a_ix+b_i)^p} + \frac{A_2}{(a_ix+b_i)^{p-1}} + \ldots + \frac{A_p}{(a_ix+b_i)}$$

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$$

$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$$

z = tan ½ x

$$dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

$$\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$senx = \frac{2z}{1+z^2}$$

Algunas Fórmulas de Derivadas

$f(x) = c$; $f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$; $f'(x) = n.x^{n-1}$
$g(x) = c.\ f(x)$; $g'(x) = c.\ f'(x)$
$h(x) = f(x) + g(x)$; $h'(x) = f'(x) + g'(x)$
$h(x) = f(x).g(x)$; $h'(x) = f(x).g'(x) + f'(x).g(x)$

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \forall g(x) \neq 0; h'(x) = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$f(x) = x^{-n} \wedge x \neq 0 \wedge -n$ es entero negativo;
$f'(x) = -\ n.x^{-n-1}$

$$f(x) = x^{\frac{p}{q}}; f'(x) = \frac{p.x^{p-1}}{q(\sqrt[q]{x^p})^{q-1}}$$

$$f(x) = \frac{1}{f(x)}; f'(x) = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$$

$$f(x) = \text{Ln } x; f'(x) = \frac{1}{x}$$

$f(x) = [g(x)]^n$; $f'(x) = n.[g(x)]^{n-1}.g'(x)$
$f(x)$ = sen x; $f'(x)$ = cos x
$f(x)$ = cos x; $f'(x)$ = - sen x
$f(x)$ = csec x; $f'(x)$ = - ctan x . csec x
$f(x)$ = sec x; $f'(x)$ = tan x . sec x
$f(x)$ = tan x; $f'(x)$ = $\sec^2$ x
$f(x)$ = ctan x; $f'(x)$ = - csec^2 x

$$(\text{sen}^{-1} u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$$

$$(\cos^{-1} u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$$

$$(\tan^{-1} u)' = \frac{1}{1+u^2} D_x u$$

$$(\cot^{-1} u)' = -\frac{1}{1+u^2} D_x u$$

$$(\sec^{-1} u)' = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} D_x u$$

$$(\csc^{-1} u)' = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} D_x u$$

(senh u)' = cosh u $D_x u$
(cosh u)' = senh u $D_x u$
(tanh u)' = sech^2 u $D_x u$
(coth u)' = - csch^2 u $D_x u$
(sech u)' = - sech u . tanh u $D_x u$
(csch u)' = - csch u . coth u $D_x u$

$$(\text{senh}^{-1} u)' = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} D_x u$$

$$(\cosh^{-1} u)' = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} D_x u \quad (u > 1)$$

$$(\tanh^{-1} u)' = \frac{1}{1-u^2} D_x u \quad (|u| < 1)$$

$$(\coth^{-1} u)' = \frac{1}{1-u^2} D_x u \quad (|u| > 1)$$

$$(\text{sech}^{-1} u)' = \frac{1}{u\sqrt{1-u^2}} D_x u \quad [u \in (0,1)]$$

$$(\text{csch}^{-1} u)' = \frac{1}{|u|\sqrt{1+u^2}} D_x u \quad (u \neq 0)$$

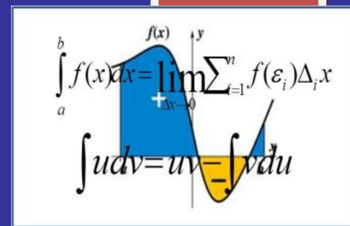
(Identidades Trigonométricas)

$\cos^2$ x + sen^2 x = 1
1 + $\tan^2$ x = $\sec^2$ x
$\cot^2$ x + 1 = $\csc^2$ x
sen x. csc x = 1
cos x . sec x = 1
tan x . cot x = 1
sen 2x = 2 sen x. cos x
cos 2 x = 2 $\cos^2$x – 1
cos 2 x = 1 - 2 sen^2x
cos 2 x = $\cos^2$x – sen^2x
$\cos^2$ 2x = ½ (1 + cos 4x)

(Identidades Trigonométricas Hiperbólicas)

$\cosh^2$ x – senh^2 x = 1
1 – $\tanh^2$ x = sech^2 x
1 – $\coth^2$ x = - csch^2 x
senh 2x = 2 senh x . cosh x
cosh 2x = $\cosh^2$ x + senh^2 x
cosh 2x = 2 senh^2 x + 1
cosh 2x = 2 $\cosh^2$ x – 1

Luis Castellanos



Nacido en Caracas, DC, Venezuela. Es Ingeniero de Sistemas (IUPFAN), Magíster en Ingeniería de Sistemas (USB), Magíster en Tecnología Educativa HC (CIHCE), y Doctor HC (CIHCE).

Ha sido docente en el IUPFAN, Academia Militar de Venezuela, Universidad Rafael Urdaneta y en La Universidad del Zulia. Actualmente es docente en UNEFA Zulia y en la Universidad Dr. José Gregorio Hernández.

Ha escrito los libros de Reflexiones Diarias (I), Reflexiones Diarias (II), Reflexiones Diarias (III) (Editorial Lulu), Seguridad en Informática y Metodología de Desarrollo de Sistemas de Información (Editorial Académica Española).

De igual manera, ha escrito Guías de Matemática I, Matemática II, y Cálculo Numérico.